الرياضيات

- نظم الأعداد
- المنطق الرياضي
- المجموعات والأعداد
- التوزيعات التكرارية والتمثيل البياني
- المجموعات والدوال
- التوابع - النهايات الاستمرار

$\pi = 3.1415926$
53589793238 46
26433832795028
841971693993751
058209749445923 0
78164062862089986
2803482534211706798
21480865132823066470
938446095505822317253 59
4081284811174502841027019
385211055596446229489549303 81
9644288109756659334461284756482337
8678316527120190914564856692346034861045
432664821339360726024914127372458700660631558817488

يحيى عبد الله فندي القضاة



www.darsafa.net

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَى عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

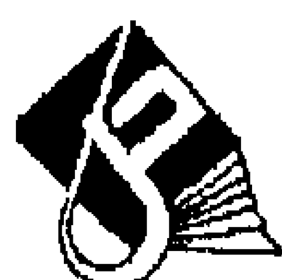
الرياضيات

الرياضيات

- نظم الأعداد
- المنطق الرياضي
- المجموعات والأعداد
- التوزيعات التكرارية والتمثيل البياني
- المجموعات والدوال
- التوابع - النهايات - الاستمرار

يحي عبد الله فندي القضاة

الطبعة الأولى
2014م - 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

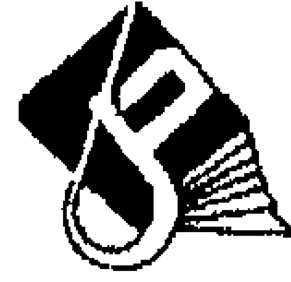
المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2011/1/325)

510
القضاة، يحي عبد الله فندي
الرياضيات: نظم الاعداد / يحي عبد الله فندي القضاة. ــ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2011.
( ) ص
ر. أ: (2011/1/325)
الواصفات: الرياضيات//

❖ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى

الطبعة الأولى

2014م – 1435هـ

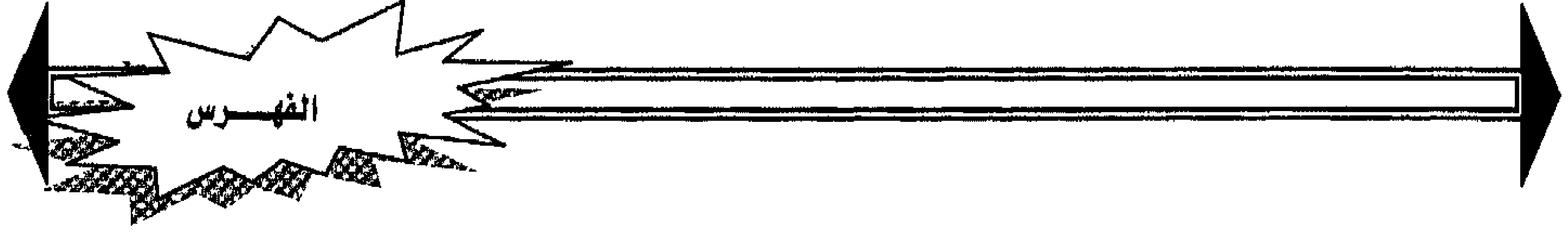


دار صفاء للنشر والتوزيع

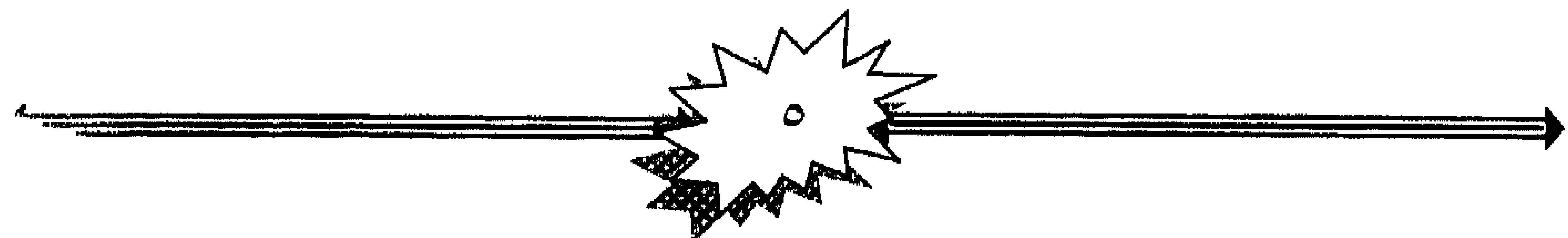
عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري ـ تلفاكس **4612190 6 962+**
هاتف: **4611169 6 962+** ص. ب **922762** عمان ـ **11192** الاردن

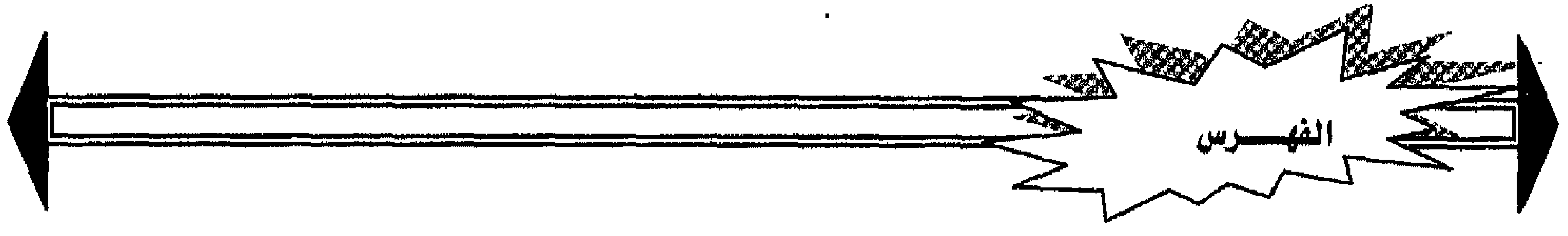
DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169
P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail:safa@darsafa.net

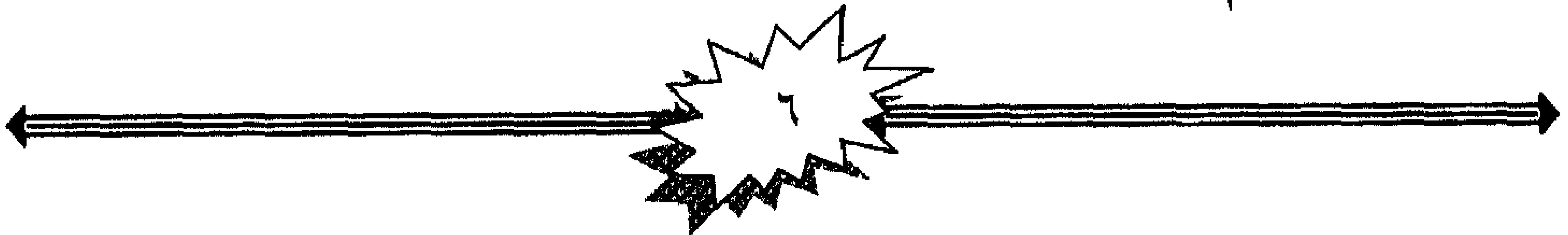
ISBN 978-9957-24-713-3 ردمك

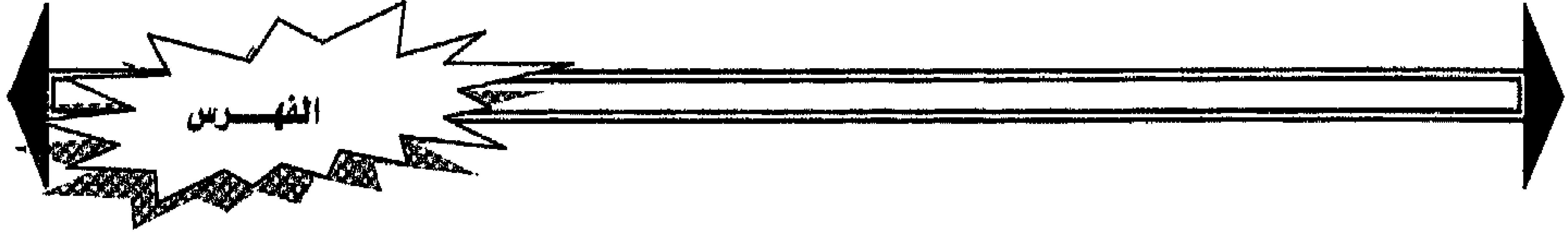


الفهرس

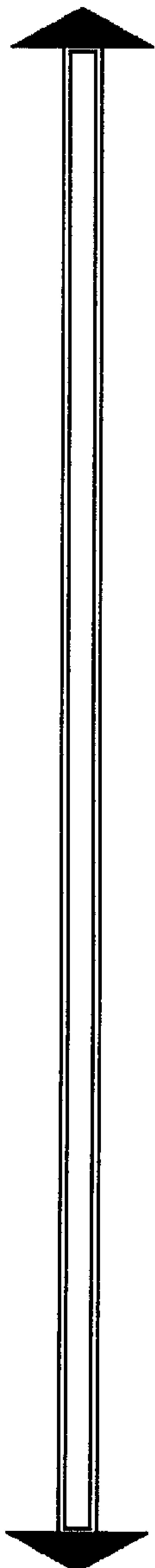



الفهـــرس



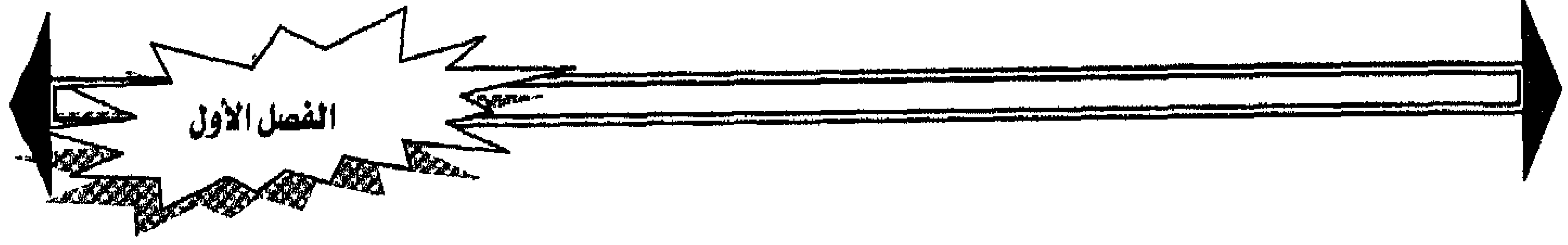

الفهـــرس







نظم الأعداد



الفصل الأول

نظم الأعداد

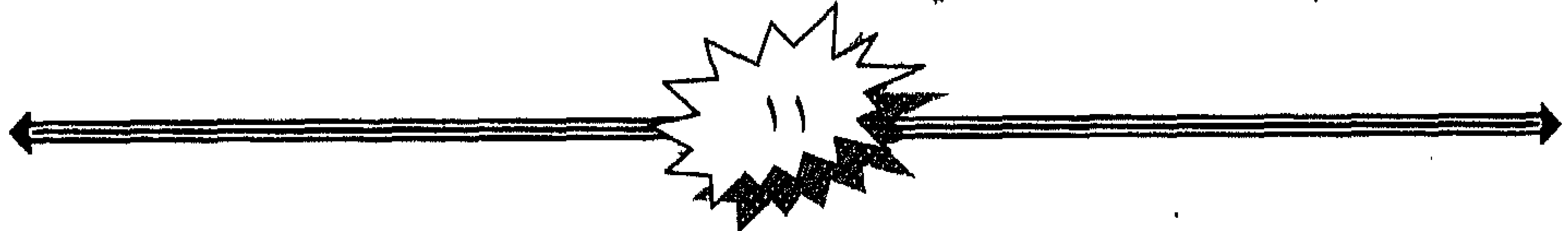
سندرس في هذا الفصل نظم الأعداد بشكل مبسط ثم نتطرق إلى بناء الأعداد الحقيقية والأعداد العقدية، مبتدئين بالأعداد الطبيعية.

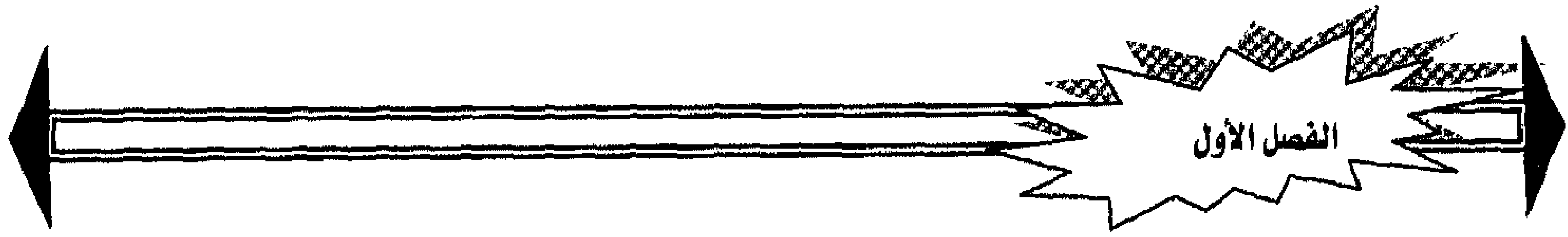
بعدها ندرس بعض الصفات والمميزات الأساسية لهذه الأعداد وكيفية التعامل معها قبل الحديث عن الأعداد ستتحدث عن نظم الترقيم ونستعرض بعضاً منها لكي نتبين أهم المميزات التي تميز كلاً منها وسبب اختفاء معظمها وشيوع نظام الأرقام العربية أو نظام الترقيم العربي.

(١-١) نظم الترقيم:

إن نظام الترقيم هو طريقة لتمثيل الأعداد بالرموز ويقوم معظم نظم الترقيم القديمة منها والحديثة على الأساس عشرة وقد ظهرت بعض النظم معتمدة العدد خمسة كأساس أو العدد عشرين كأساس وأغلب الظن أن هذه الأسس تم اختيارها في حينه باعتبار أن لدى الإنسان عشرة أصابع في يديه الاثنين، خمسة أصابع في كل يد وعشرين أصبعاً في يديه ورجليه معاً.

وقد استخدمت أسس أخرى مثل العدد اثني عشر كما استخدم البابليون العدد ستين أساساً لنظامهم في الترقيم ومع شيوع استخدام الحاسبات الإلكترونية تجدد الاهتمام بنظم الترقيم يختلف أساسها عن العدد عشرة وأهمها النظام الثنائي أو الإثنيني الذي أساسه العدد اثنان علماً ان هذا النظام تم تقديمه من قبل العالم والفيلسوف الألماني "لايبنز" قبل أكثر من ثلاثمائة سنة.





تقع نظم الترقيم في صنفين رئيسين هما النظم التجميعية والنظم ذات القيمة المكانية ففي النظم التجميعية يثمل كل رمز عدداً معيناً بصرف النظر عن مكان ذلك الرمز ومثال ذلك نظام الترقيم المصري القديم "الهيروغليفي" هذه النظم سميت نظاماً تجميعياً لأن كتابة رمز عدد بجانب رمز عدد أخر يمثل مجموعة العددين فإذا أردنا تمثيل العدد ثلاثين فما علينا سوى تكرار العدد عشرة ثلاث مرات.

أما النظم ذات القيمة المكانية فتتميز بأنها تسمح باستخدام رمز واحد لتمثيل أعداد كثيرة وذلك بتغيير مكانه، فمثلاً في نظام الترقيم العربي، يمثل الرقم "٣" في رمز العدد ٢٠٣١ ثلاث عشرات، أي ثلاثين ويمثل الرقم "٣" في رمز العدد ٣٥١ ثلاث مئات أي ثلاثمائة وهكذا.

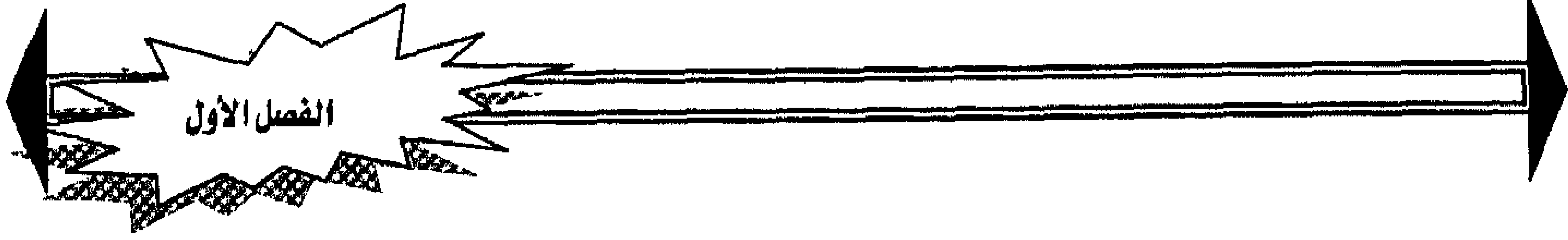
أما النظام البابلي فقد كان ذا قيمة مكانية عند تمثيل الأعداد التي تزيد على ستين وتجميعاً عند تمثيل الأعداد التي تقل عن ستين.

(١-١-١) نظام الترقيم المصري (الهيروغليفي):

استخدم هذا النظام منذ ٣٤٠٠ سنة قبل الميلاد تقريباً وأساسه العدد عشرة ولتمثيل مضاعفات العشرة فقد استخدم المصريون رموزاً مختلفة وكما يلي:

١ واحد	♂ ألف	مليون
∩ عشرة	عشرة آلاف	
ϴ مائة	ʘ مائة	





ومن خلال استخدام هذه الرموز معاً وخاصيته التكرار لهذه الرموز تمكن المصريون من تمثيل الأعداد وكما هو موضح في أدناه:

١١١ ثلاثة

∩∩∩ عشرون　　　　١١∩∩ϴ　　　　ثلاثة وعشرون ومائة

١١∩ أحد عشر　　　　١١∩∩∩ϴ　　　　اثنان وثلاثون وألف

إن أهم خاصية في منظومة الأرقام المصرية هو أن كل رمز له قيمة واحدة فقط بغض النظر عن مكانه كما أن الترتيب لا يؤثر في قيمة الرقم فمثلاً الأرقام

١ϴ∩　　　　ϴ∩١　　　　∩ϴ١

لها نفس القيمة.

من الواضح أن هذا النظام غير عملي في تمثيل الأعداد الكبيرة.

(٢-١-١) نظام الترقيم الروماني:

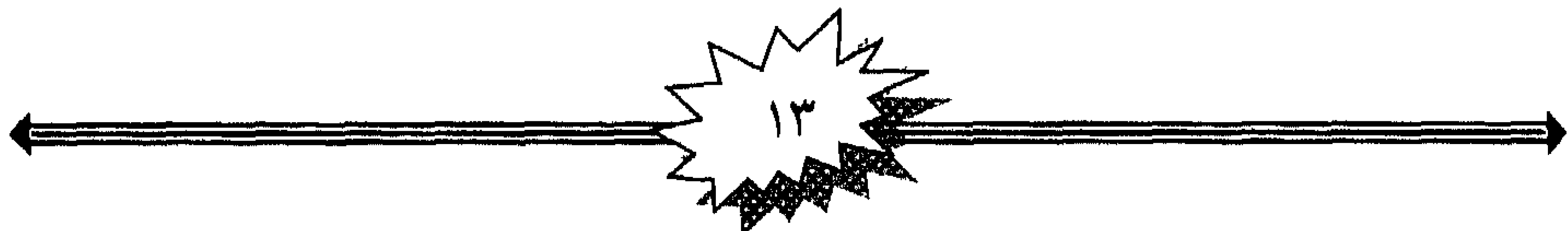
نظام الترقيم الروماني يتكون من الرموز التالية:

I واحد　　　　L خمسون　　　　ألف

V خمسة　　　　مائة

X عشرة　　　　O خمسمائة

وهي ما تزال تستخدم بشكل محدود ليومنا هذا.



لنظام الترقيم الروماني خاصيتين أساسيتين:

أ) كل رمز في هذا النظام له قيمة واحدة فقط بغض النظر عن مكانه كما في نظم الترقيم المصري فمثلاً "x" تمثل العدد عشرة سواء في الرقم "xL" أو في الرقم "Lx"

ب) تستخدم خاصيتا الطرح والجمع في هذا النظام، فمثلاً الأعداد أربعة وخمسة وستة تمثل كما يلي:

IV أربعة

V خمسة

VI ستة

حيث إن وضع رمز عدد صغير إلى يسار رمز عدد كبير منه يعني طرح العدد الصغير من الكبير هذه خاصية غير موجودة في نظام الترقيم المصري.

(٣-١-١) نظام الترقيم البابلي:

يتكون نظام الترقيم البابلي من الرموز الثلاثة التالية:

١ واحد

$>$ عشرة

Γ رمز عملية الطرح.

وفي العصر البابلي المتأخر استخدم الرمز λ لتمثيل الصفر.

يمتلك نظام الترقيم البابلي خاصية الطرح كما موجود في نظام الترقيم الروماني فمثلاً الرمز ١١>> يمثل العدد ٢٢ والرمز ١١>> يمثل العدد ١٨ هذا الأسلوب يستخدم في تمثيل الأعداد لغاية ٦٠ وبعدها يتم استخدام صفة (المرتبة حيث يكون للمكان تأثير في قيمة الرمز)، فمثلاً الرمز ١١١ >>١

يمثل العدد ٢٣+٦٠ = ٨٣

والرمز ١١١ < ١١١ >> ١<

يمثل ١٥+ (٢٣×٦٠) + (١١×٦٠×٦٠) = ٤,٩٩٥

من الواضح أن هذا النظام أكثر مرونة من أنظمة الترقيم المصرية والرومانية في تمثيل الأعداد الكبيرة.

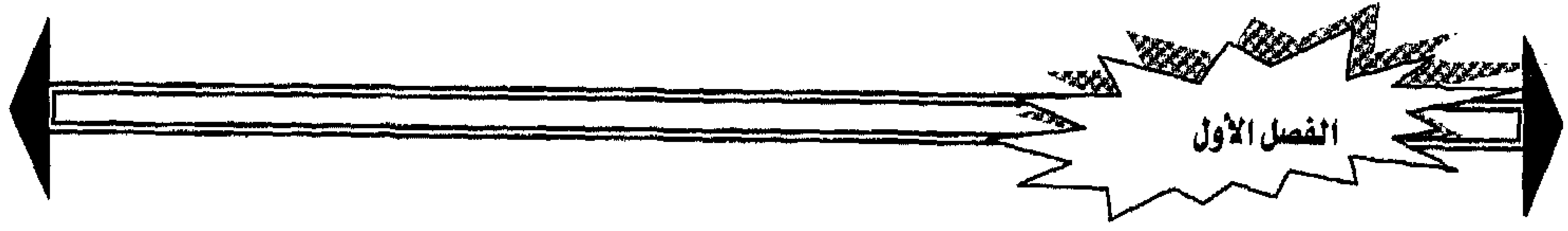
(٤-١-١) نظام الترقيم العربي:

يعتبر نظام الترقيم العربي بصيغته المشرقية والمغربية من أكثر النظم مرونة وقدرة على التعامل مع الأعداد لكونه ذا قيمة مكانية، مثل النظام البابلي ولكن أساس نظام الترقيم العربي هو العدد عشرة ولكونه يحتوي على رمز للصفر ودلالته (لاشيء) هذه الصفات جعلته نظاماً رائعاً قابلاً لتمثيل أي عدد مهما كان كبيراً باستخدام عشرة رموز فقط هي:

الصيغة المشرقية ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

الصيغة الغربية O,١,٢,٣,٤,٥,٦,٧,٨,٩

كما أنه حل الكثير من المشاكل التي تعترض انجاز العمليات الرياضية على الأعداد ولذلك شاع استخدامه وطغى على النظم الأخرى التي اقتصر استخدامها على حالات خاصة.



تمارين (١-١):

١. فيما يأتي رموز مصرية قديمة تمثل أعداداً، مثل الأعداد نفسها بالأرقام العربية .

١ ٩ ♂ ∩∩∩∩س١١

∩∩∩١ ٩ ♂ ١١١ ∩∩∩ ٩ ٩ ♂

١١ ∩ ١١١ ∩

٢. فيما يأتي أرقام عربية تمثل أعداداً، مثل الأعداد نفسها باستخدام النظام البابلي:

٥٠١. ٧٧٧. ٢٥٠. ١٤٠٧. ٢٣٥٧. ٣٢. ١٠.

٣. كيف كان الرومان يمثلون الأعداد التي نكتب عن رموزها كما يلي:

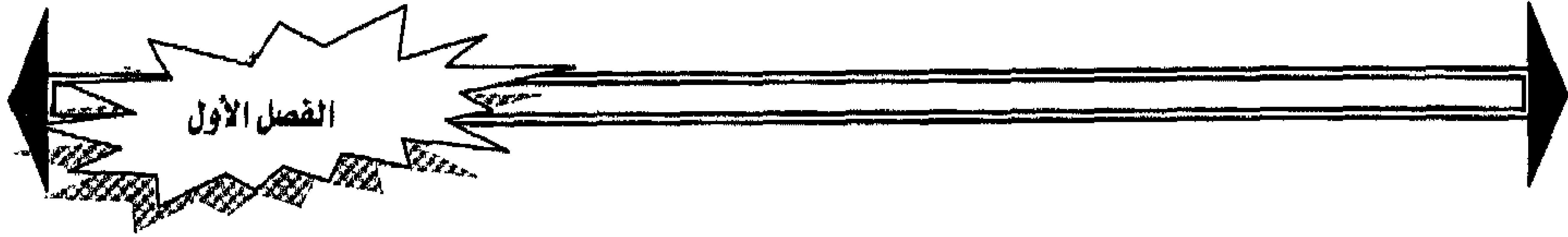
٥٢٥١. ٥٣٨. ٥٣٧. ٣٢٨. ٥٥٥. ٦٥. ١٢٠. ١٤٢٣. ١٥

٤. ما أهم مميزات النظام الروماني.

٥. تعني معظم الكتب الحديثة بالتمييز بين العدد (Number) والرقم (Numerd) فالعدد فكرة مجردة والأرقام أسماء ورموز تستخدم لتمثيل هذه الأفكار.

فمثلاً عند قولنا أن العدد ١ هو العنصر المحايد لعملية الضرب المعرفة على الأعداد الصحيحة والعدد ٢ هو عدد أولي" زوجي" مستخدمين نظام الترقيم العربي، ولو استخدمنا نظام الترقيم الروماني قلنا أن العدد I هو العنصر المحايد





لعملية الضرب على الأعداد الصحيحة والعدد I هو عدد أولي زوجي" وباستخدام الترقيم على حساب الجمل نقول "أن العدد أ هو العنصر المحايد لعملية الضرب على الأعداد الصحيحة والعدد ب هو عدد أولي زوجي."

فيما يأتي عبارات تتضمن رموزاً من نظام الترقيم، ضع أقواس حول الرموز التي تعتبر أرقاماً وأترك الرموز التي تمثل أعداداً بدون تغيير.

أ) الرمز ١٣ يحتوي الرقم ٣ في مكان الآحاد والعدد ١٣ هو سادس الأعداد الأولية.

ب) عند تمثيل الأعداد باستخدام نظام الترقيم العربي إذا كان ٥ في حقل الآحاد فإن العدد قابل للقسمة على ١٥.

ج) ٤ نصف ٨ لأن (٤) ٢٤ = ٨ ولكن ٣ نصف ٨ لأننا لو شطرنا ٨ شاقوليا نحصل على ٣ و ٤.

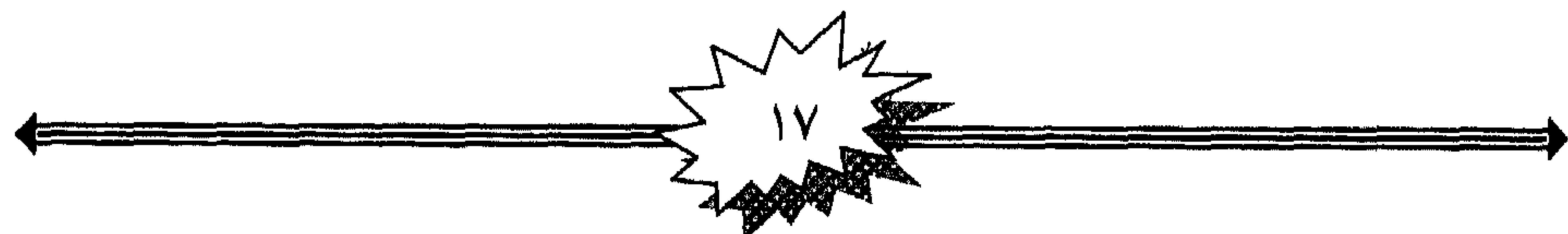
٦. في نظام الترقيم الأثنيني نستخدم رمزين هما "٠" و"١" لتمثيل الأعداد فالرموز (١٠١١٠١١) يعني:

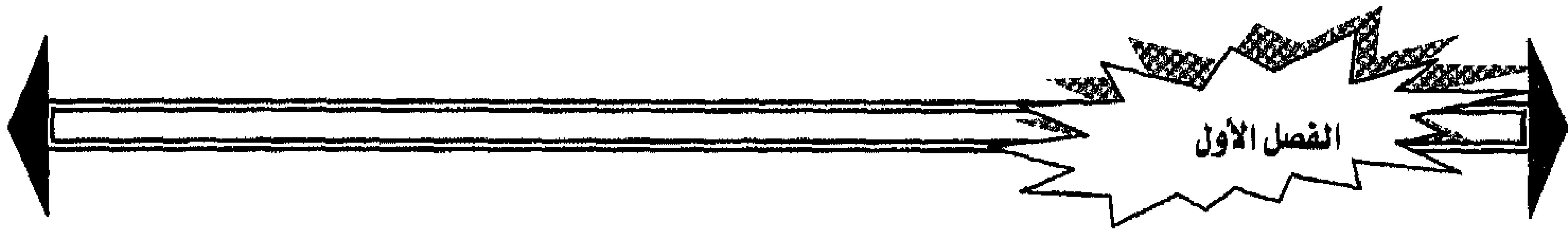
٩١ = ١+ (٢) ١+(٢^{٢}) ١+ (٢^{٣}) ١+ (٢^{٤}) ١+ (٢^{٥}) ٠+ (٢^{٦}) ١٠.

ماذا يعني كل من:

(١٠١٠٠)، (١١١١٠١٠)، (٠١٠٠١٠)، (١١١١١١)س.

حاول أن تكتشف طريقة التحويل المعاكس.





(٢-١) الأعداد الطبيعية:

الأعداد الطبيعية هي أولى الأعداد التي يقابلها الإنسان والتي تمثل في نظام الترقيم العربي ب: ١،٢،٣.....

ومن الطبيعي أننا نستطيع تمثيلها في نظم الترقيم المختلفة الأخرى كما يمكن تمثيلها هندسياً كنقاط على خط مستقيم ومع ذلك يبقى السؤال عن ماهية الأعداد الطبيعية وكيف يمكن تعريفها رياضياً.

لقد كان الرياضي الإيطالي بيانو (Peano) أول من أنشأ الأعداد الطبيعية على أساس بديهات سميت بأسمه (Peauo's Axious) في نهاية القرن التاسع عشر وكما يلي:

الأعداد الطبيعية هي مجموعة من العناصر تمتلك المواصفات التالية:

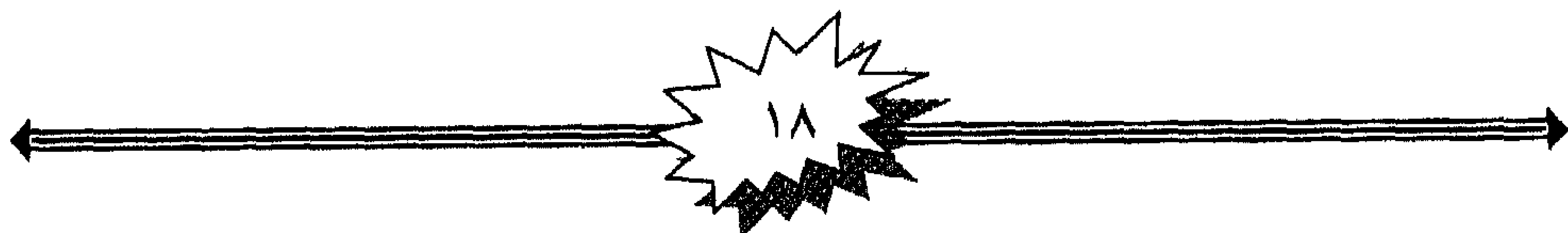
أ) تحتوى على عنصر يرمز له ١.

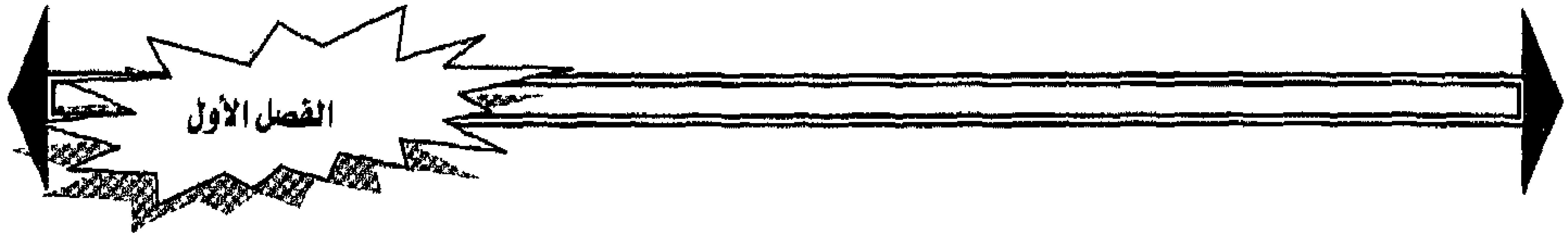
ب) لكل عنصر في المجموعة هناك عنصر واحد فقط لاحق له.

ج) إذا كان أ و ب عنصرين مختلفين في المجموعة فإن لاحق أ ولاحق ب مختلفان أيضاً.

د) العنصر ١ ليس لاحقاً لأي من عناصر المجموعة.

و) إذا كانت هناك مجموعة من العناصر تحتوي على العنصر (١، و) إذا كانت هذه المجموعة تحتوي أيضاً على العنصر اللاحق لكل عنصر من عناصرها فإن هذه المجموعة تحتوي على المنظومة بكاملها، هذه البديهة تسمى بديهة الاستقراء للسهولة تستخدم الرمز س٠ بدلاً من (لاحق





س) في تعريف "بيانو" لعمليات الجمع والضرب لأي عددين طبيعيين س، ص وكما يلي:

ليكن س٠= س+ ١

(س+ ص)٠ = س+ ص٠

س× ١= س

س ص + س= س ص٠

من خلال هذه التعاريف يمكن وبسهولة تحقيق ما يلي:

لكل من الأعداد الطبيعة أ، ب، جـ يكون أ+ ب،أ، ب عددين طبيعيين أيضاً ويحققان القوانين التالية:

أ) قانون الإبدال (Commutative Law)

أ) بالنسبة للجمع أ + ب= ب+أ

ب) بالنسبة للضرب أ × ب= ب×أ

ب) قانون التجميع (Associative Low)

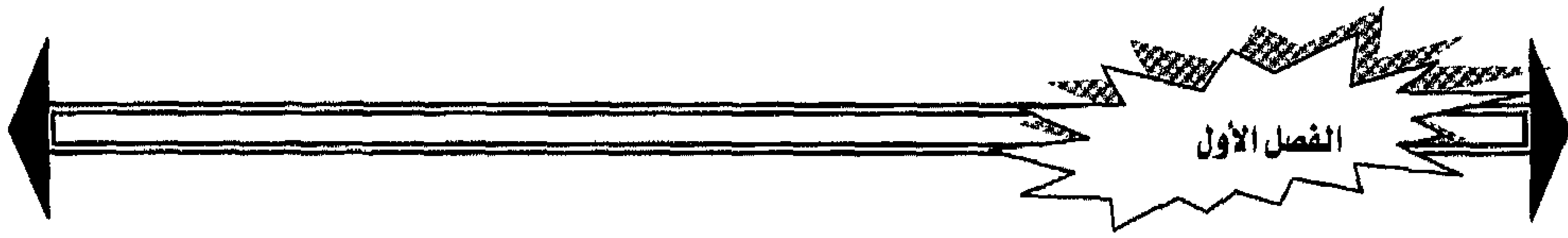
أ) بالنسبة للجمع أ + (ب+جـ)= (أ + ب) + جـ

ب) بالنسبة للضرب (أ + ب) × جـ= أ × (ب×جـ)

ج) قانون التوزيع (Distributive Law)

أ × (ب+جـ) = (أ × ب) + (أ× جـ)





(ب+ جـ) × أ = (ب× أ) + (جـ× أ)

مثال(١): برهن أن (٤-٣) × ٥= ٣ × (٤×٥)

الحل: (٤ × ٣) × ٥ = ٣ (٤×٥)

باستخدام قانوني التجميع والإبدال على التوالي.

مثال(٢): لنعرف عمليتين جديدتين × و + على الأعداد الطبيعية وكما يلي:

أ × ب = ٢ أب

أ+ب = ٢ أ

تأكد من تحقق القوانين الثلاثة أعلاه بالنسبة لهاتين العمليتين الحل:

بما أن:

ب+ أ= ٢ ب

ب×أ= ٢ب أ = ٢ أ ب

س أ+ (ب+ جـ)= أ+ (٢ب)= ٢ أ

(أ+ب) + جـ = (٢أ) + جـ = ٢(٢أ) = ٤أ

(أ×ب) × جـ = (٢أ) × جـ = ٢(٢أب) × جـ = ٤أب جـ

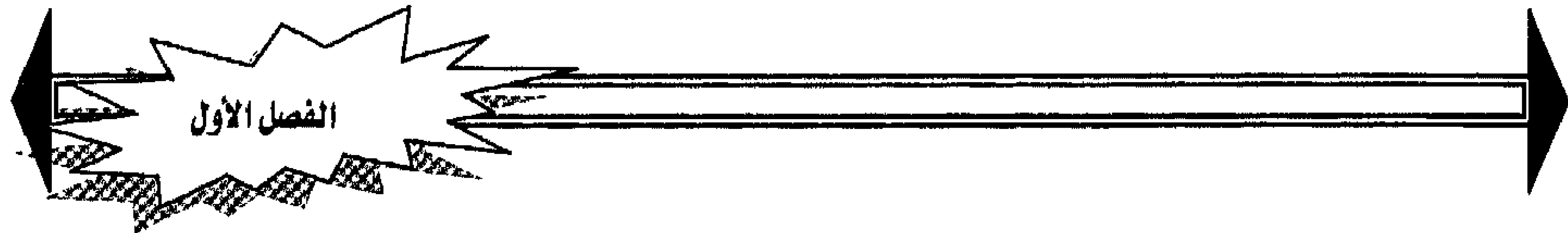
إذا قانون الإبدال يتحقق في حالة الضرب ويفشل في حالة الجمع كما أن قانون التجميع يتحقق في حالة الضرب ويفشل في حالة الجمع أيضاً أما بالنسبة لقانون التوزيع فإنه يتحقق كما هو مبين أدناه:

أ × (ب+ جـ) = أ × (٢ ب) = ٢ أ (٢ ب) = ٤ أب

(أ × ب) + (أ × جـ) = (٢ أجـ) + (٢ أ جـ) = ٢ (٢ أ ب) = ٤ أسب

وللطالب أن يتحقق من قانون التوزيع في حالة (أ + ب) × جـ.





(١-٢-١) الاستقراء الرياضي:

حدد بيانو في تعريفه الذي وضعه للأعداد الطبيعية بديهية الاستقراء التالية:

إذا كانت هناك مجموعة من العناصر تحتوي على العنصر" ! "وإذا كانت هذه المجموع تحتوي أيضاً على العنصر اللاحق لكل عنصر من عناصرها فإن هذه المجموعة تحتوي على المنظومة بكاملها.

هذه البديهة تستخدم في برهنة صحة أو خطأ أي فرضية أو عبارة وتسمى طريقة البرهان هذه بـ الاستقراء الرياضي - يعبر عن هذه الطريقة بما يلي:

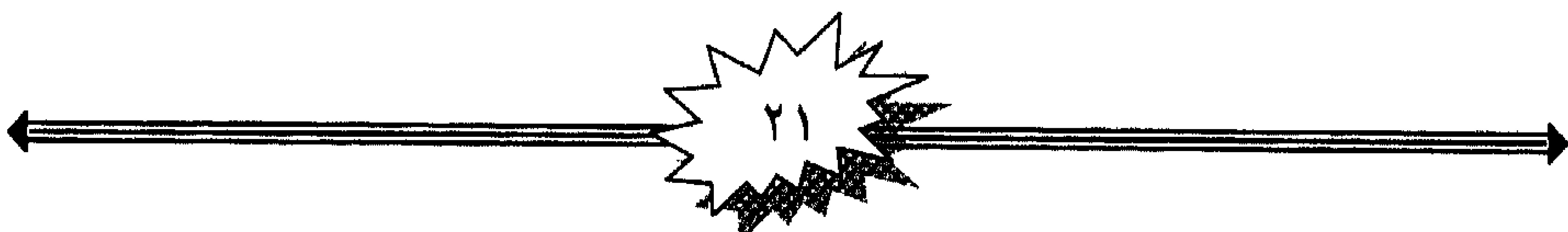
نفرض أن ﺟ (ن) عبارة عن معرفة لكل الأعداد الطبيعية المتمثلة بـ (ن) لكن نبرهن أن ﺟ (ن) عبارة صحيحة لكل الأعداد الطبيعية المتمثلة بـ ن فإن عليه برهنة ﺟ (١):

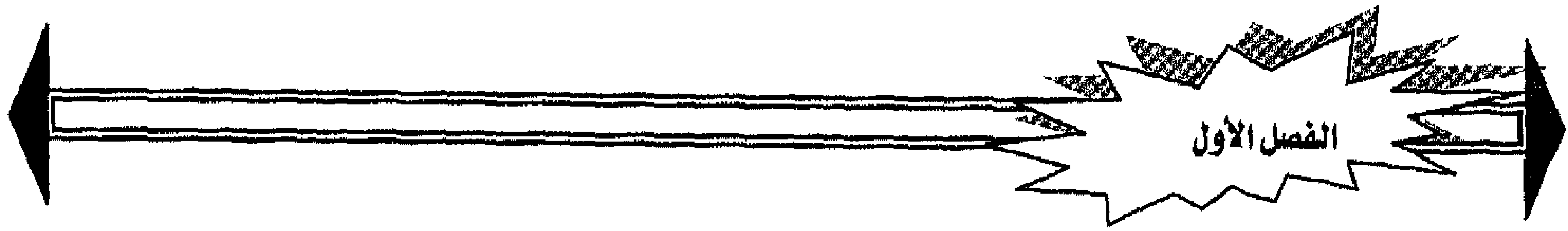
أ) عبارة صحيحة.

ب) إذا كانت ﺟ (ك) عبارة صحيحة فإن ﺟ (ك+١) عبارة صحيحة أيضاً، حيث ك يمثل عدد صحيح.

هذه الفقرة يمكن إبدالها بما يلي:

إذا كانت ﺟ (س) عبارة صحيحة لكل الأعداد الطبيعية ١ ≤ س ≤ ك فإن ﺟ (ك+١) عبارة صحيحة أيضاً، حيث ك يمثل أي عدد طبيعي.





مثال(٣): إذا عرفنا $أ^{ن}$ حيث تمثل ن عدداً طبيعياً كما يلي:

$$أ^{1} = أ$$

$$أ^{ك+1} = أ^{ك} . أ$$

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي - بأن $(أ . ب)^{ن} = أ^{ن} . ب^{ن}$

الحل:

إذا كان ن= ١ فإننا حسب التعريف، نجد أن:

$$(أ \times ب)^{1} = أ \times ب$$

هذا يعني بأن ح (١) صحيحة، الآن نفرض أن ح(ك) صحيحة حيث يمثل ك عدداً طبيعياً أي أن $(أ \times ب)^{ك} = أ^{ك} \times ب^{ك}$.

علينا أن نبرهن أن ح(ك+١) صحيحة أي أن:

$(أ . ب)^{ك+1} = (أ \times ب)^{ك} \times (أ \times ب)$ (حسب التعريف)

$= أ^{ك} \times (ب^{ك} \times أ) \times ب)$ حسب فرضية الاستقراء

$= أ^{ك} \times (أ \times ب^{ك}) \times ب$ حسب قانون التجميع

$= (أ^{ك} \times أ) \times (ب^{ك} \times ب)$ حسب قانون التجميع

$= أ^{ك+1} \times ب^{ك+1}$ حسب التعريف

(٢-٢-١) بعض صفات الأعداد الطبيعية:

فيما يأتي أ، ب، ج تمثل أعداداً طبيعية:

أ) العدد الطبيعي أ ي ١ هو العدد الطبيعي الوحيد الذي يحقق العلاقة:



ا . ١ = ١ . ا = ا

ويسمى عنصراً محايداً لعملية الضرب.

ب) قانون الحذف يتحقق بالنسبة لعملتي الجمع والضرب وكما يلي:

إذا كان ا = جـ فإن ا + ب = جـ + ب

إذا كان ا = جـ فإن ا ب = جـ ب

ج) لكل عددين طبيعين مختلفين ا ، ب هناك عدد طبيعي جـ

يحقق إحدى العلاقتين أما ب + جـ = ا ا أو ا + جـ = ب

د) إذا كان ا + ب = جـ فإننا نكتب ا < جـ أي أن ا أصغر من جـ أو

جـ أكبر من ا .

هـ) أي عددين طبيعيين ا و ب يحققان واحدة فقط من العلاقات التالية:

أما ب < ا أو ا < ب ا أو ا = ب

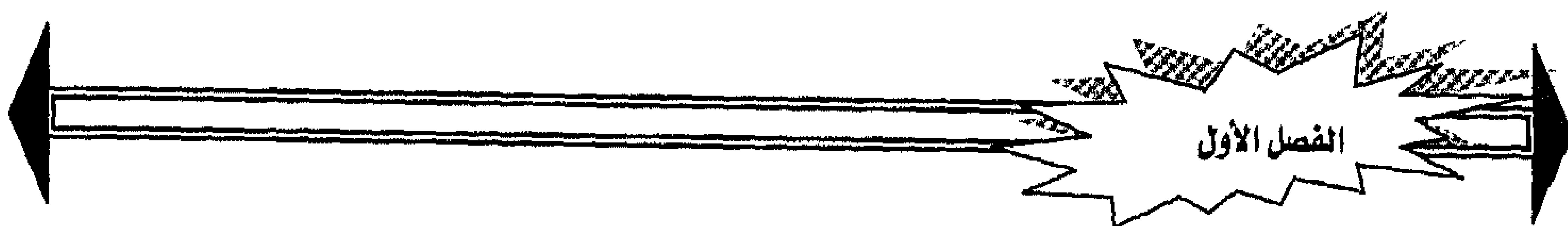
و) إذا كان ا < ب أو ب < جـ فإن ا < جـ

ز) إذا كان ا < ب فإن ا + جـ < ب+ جـ

ح) إذا كان ا < ب فإن ا . جـ < ب. جـ

تمارين (٢-١)

١. فيما يأتي عرفنا عمليات على الأعداد الطبيعية، بين لكل منها أن كانت قوانين التجميع والإبدال والتوزيع تتحقق أم لا.



أ) أ + ب = أ + ٢ب، أ × ب = ٢ أ ب

ب) أ + ب = أ + ب^{٢}، أ × ب = أ ب^{٢}

ج) أ + ب = أ^{٢} + ب^{٢}، أ × ب = أ^{٢} ب^{٢}

٢. إذا كان أ$^{ك+١}$ = أ^{ك}. ، أ^{١} = أ

١^{ن} = ١ و أ^{٢} . أ^{ن} = أ$^{(م+ن)}$ و (أ^{م})^{ن} = أ$^{م ن}$

٣. برهن ما يأتي:

أ) ٢ ن (ن+١) = ٤ + ٨ + ١٢ + ... + ٤ن.

ب) ٣ن (ن+١) (ن+٢) = ٣ (٦) + ٦ (٩) + ٩ (١٢) + ... + ٢ن (٣ ن + ٣).

ج) ن (ن+١) (٢ن+١) = ٦ (١)^{٢} + ٦ (٢)^{٢} + ٦ (٣^{٢}) + ... + ٦ (ن^{٢}).

د) ن (ن+١) (ن+٢) = ٣ (١·٢) + ٣ (٢·٣) + ٣ (٣·٤) ... + ٣ن (ن+١).

هـ) $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ = ١ + ٢ + ٣ + ... + ن.

و) $\frac{ن(٤ن^{٢}+٩ن-١)}{٦}$ = ٢ + ٩ + ٢٠ + ٣٥ + ٥٤ + ... + (ن+١) (٢ن - ١).

ز) $\frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٦}$ = ١ + ٣ + ٦ + ٩ + ١٠ + ١٥ + ... + $\frac{ن(ن+١)}{٢}$.

ح) ن^{٢} = ١ + ٣ + ... + (٢ن - ١).



ط) ن (٢ن – ١) = ١+ ٥+ ....+ (٤ن – ٣).

ي) ن^{٢} (٢ن^{٢} – ١)= ١^{٣} + ٣^{٣} + ... + (٢ن – ١)^{٣}.

ك) ٢ (٢^{ن} – ١) = ٢+ ٢^{٢} + ٢^{٣}+ ....+ ٢^{ن}.

ل) (ن-١) ٢$^{ن+١}$ + ٢= ١(٢) + ٢(٢^{٢}) + ٣ (٢^{٣}) + ...+ ن(٢^{ن}).

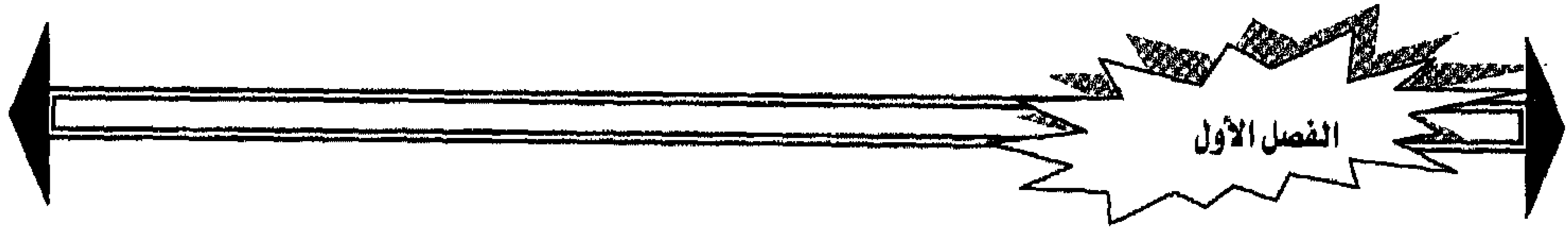
(٣-١) الأعداد الصحيحة:

إذا سألنا ما العدد الطبيعي الذي إذا أضيف إلى العدد الطبيعي ٣ يكون الناتج ٥ فالجواب هو العدد الطبيعي ٢.

أما إذا سألنا عن العدد الطبيعي الذي يضاف إلى العدد الطبيعي ٥ ليكون الناتج ٣ فالجواب لا يوجد، بشكل عام إذا كان أ ، ب عددين طبيعيين فلا يستوجب عدد طبيعي بحيث أن أ + جـ = ب.

من الواضح أنه إذا كان أ أكبر من ب فإن العلاقة لا تتحقق بينما إذا كان أ أصغر من ب فيوجد عدد طبيعي ج بحيث أن أ + جـ = ب.

يتضح مما سبق أن هناك ضرورة لإيجاد الأعداد الطبيعية السالبة والصفر والتي شكلت مع الأعداد الطبيعية ما يسمى اليوم بالأعداد الصحيحة و يستخدم تعبير أعداد الصحيحة الموجبة أحياناً بدلاً من الأعداد الطبيعية لكي نعرف العدد الصحيح سوف نقدم رمزاً جديداً يمثل زوجاً من الأعداد الطبيعية أ، ب ويكتب (أ، ب) العدد الطبيعي أ يسمى مسقطاً وكذلك العدد الطبيعي ب.



(١-٣-١) **تعريف:**

(ﭐ، ب) = (جـ، د) إذا وفقـط إذا ﭐ + د = ب+ جـ هـذه المساواة تحقـق الخواص الثلاثة التالية:

أ) الانعكاسية (Reflexioity)

(ﭐ، ب) = (ﭐ، د)

ب) التناظر أو التماثل (Symmetry)

إذا كان (ﭐ، ب) = (جـ، د) فإن (جـ، د) = (ﭐ، ب)

ج) التعدي (Trausitivity)

إذا كـان:(ﭐ، ب) = (جـ، د) وكـان (جـ، د) = (هـ، و) فـإن :ﭐ ، ب) = (هـ، و). هذه الخـواص تـبرهن باسـتخدام تعريـف المساواة وصـفات الأعـداد الطبيعية فالأولى تتحقق لكون ﭐ + ب = ب + ﭐ. والثانية لأن:

(ﭐ،ب) = (جـ، د)← ﭐ + د= ب+ جـ ← جـ + ب= د+ ﭐ ←(جـ، د)= (ﭐ،ب).

أما الثالثة فتبرهن كما يلي:

بما أن:

(ﭐ، ب) = (جـ، د) ← ﭐ + د = ب + جـ

(جـ، د) = (هـ, و) ←ج + و = د + هـ



فإن:

(م+ د) + هـ = (ب+ جـ) + و= ب + (جـ + هـ) = ب + (د + و).

وباستخدام قانوني التجميع والأبدال ينتج:

(م + هـ) + د = (ب + و) + د

وباستخدام قانون الحذف ينتج:

م + هـ = ب + د وهذا يعني:

(م، ب) = (هـ، و).

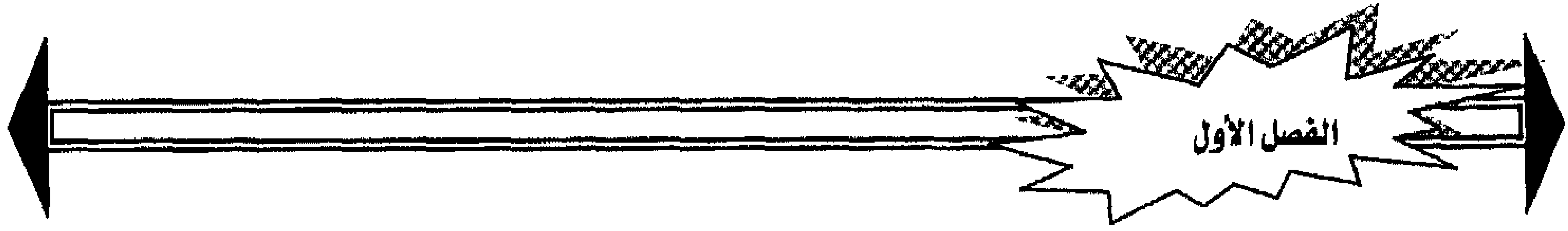
(٢-٣-١) تعريف:

كل علاقة تحقق الخواص الثلاث الأنفة الذكر تسمى علاقة تكافؤ فالمساواة المعرفة في (١-٣-١) تكون علاقة تكافؤ لذا فهي مجموعة أزواج الأعداد الطبيعية إلى صفوف تكافؤ، كل صف يحتوي على عناصر متكافئة (متساوية) فيما بينها.

(٣-٣-١) تعريف:

العدد الصحيح هو صف تكافؤ من الأزواج المرتبة، نرمز لصف التكافؤ الذي يحوي (م، ب) بالرمز [(م، ب)] تعرف عمليتا الجمع والضرب على صفوف الأزواج المرتبة كما يلي:

أ) الجمع [(م، ب)] + [(جـ، د)] = [(م + جـ، ب + د)].



ب) الضرب [(ﻫ، ب)] × [(جـ، د)] = [(ﻫس جـ + ب د، ﻫد، ب جـ)].

ربما تبادر الشك إلى ذهن القارئ حول جودة هذين التعريفين لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين على الأعداد الصحيحة (وهي كما قلنا قبل قليل صفوف التكافؤ).

فماذا لو اخذنا عناصر اخرى؟ وهل يتغير الناتج؟ ويمكن أن نعيد التساؤل بشكل أوضح قائلين:

لو أخذنا عنصراً من صف التكافؤ الذي يحتوي (ﻫ، ب) وعنصراً من صف التكافؤ (جـ، د) غير العنصرين الذين اخذناهما فهل سيكون مجموعهما مكافئاً لمجموع (ﻫ ، ب) و(ج، د)؟.

وهل سيكون ناتج ضربهما مكافئاً لناتج ضرب (ﻫ ، ب)،(هـ، د)؟.

الجواب : نعم وكما مبين أدناه:

اذا كان : ($جـ_1$ + $د_1$) = (جـ، د)، ($ﻫ_1$، $ب_1$) =(ﻫ ، ب)

فإن هذا يعني حسب تعريف المساواة أن :

$جـ_1$ + د= $د_1$ + جـ، $ﻫ_1$ + ب + $ب_1$+ ﻫ

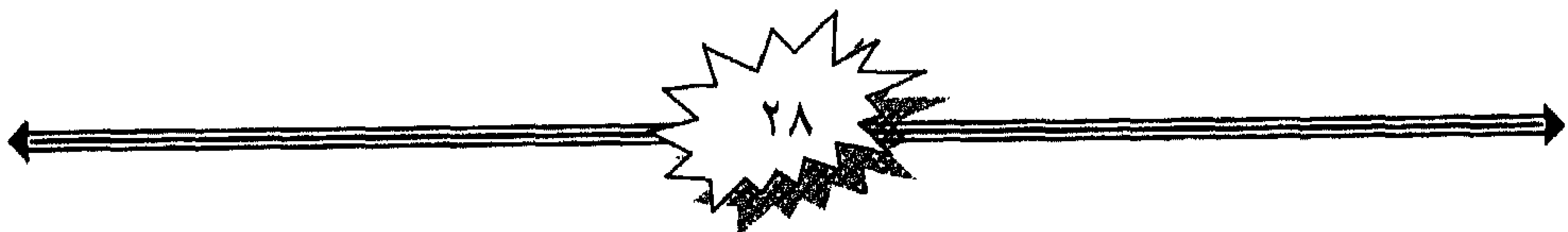
من هذا ينتج وباستخدام قانوني التجميع والإبدال نحصل على:

$جـ_1$ + د + $ﻫ_1$+ ب = $د_1$ + جـ + $ب_1$+ ﻫ

($جـ_1$+ $ﻫ_1$) + (ب + د) + ($د_1$ + $ب_1$) + (ﻫ + جـ)

وحسب تعريف المساواة يكون:

[($جـ_1$+$ﻫ_1$)، ($د_1$+$ب_1$)] = [(ﻫ + جـ)،(ب + د)]



ومن هذا ينتج: (أ$_1$، ب$_1$) + (جـ$_1$، د$_1$) = (أ، ب) + (جـ، د).

أما بالنسبة للضرب فإن: (أ، ب) (جـ، د) = (أ$_1$، ب$_1$) × (جـ$_1$، د$_1$).

إذا وفقط إذا كان:

↔ (أ جـ + ب د، أ د + ب جـ) = (أ$_1$ جـ$_1$ + ب$_1$ د$_1$، أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$).

↔ إضافة sp$_1$ للطرفين أ جـ + ب د + أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ = أد + ب جـ +
أ جـ + ب$_1$ د$_1$.

↔ أد$_1$ + أ جـ + ب د + أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ = أد$_1$ + أد + أد + ب ج
+ أ$_1$ ج$_1$ + ب$_1$ د$_1$.

↔ بالفرض أ (د$_1$ + جـ) + ب د + أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ + أ د$_1$ + أ د + ب جـ
+ أ$_1$ جـ$_1$ + ب$_1$ د$_1$

↔ أ (جـ$_1$ + د) + ب د + أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ = أ د$_1$ + أ د + ب جـ + أ$_1$ جـ$_1$
+ ب$_1$ د$_1$.

↔ بالحذف والإبدال:

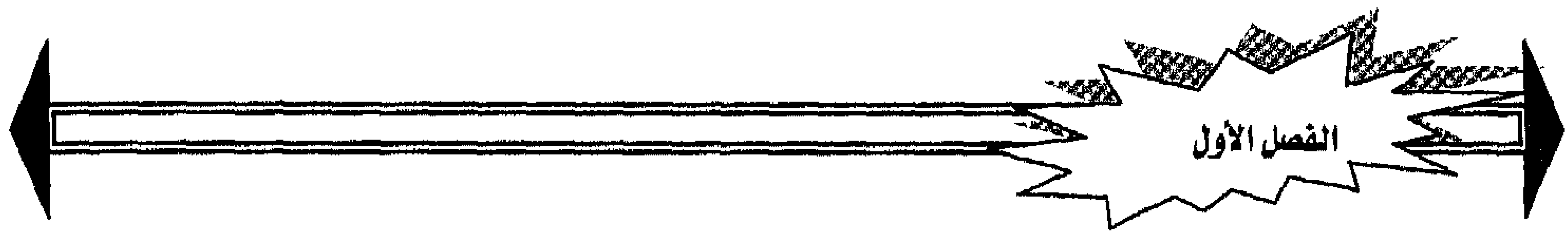
أ$_1$ جـ$_1$ + أ د + ب د + أ$_1$ د$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ = أد$_1$ + أد + ب جـ + أ$_1$ جـ$_1$ +
ب$_1$ د$_1$.

↔ أ جـ$_1$ + ب$_1$ جـ$_1$ + ب د + أ$_1$ د$_1$ = أ د$_1$ + ب جـ + أ$_1$ جـ$_1$ + ب$_1$ د$_1$

↔ جـ$_1$ (أ + ب$_1$) + ب د + أ$_1$ د$_1$ = أد$_1$ + ب جـ + أ$_1$ جـ$_1$ + ب$_1$ د$_1$

↔ بالحذف جـ$_1$ أ$_1$ + جـ$_1$ ب + ب د + أ$_1$ د$_1$ = أد$_1$ + ب جـ + أ$_1$ جـ$_1$ +
ب$_1$ د$_1$

↔ جـ$_1$ ب + ب د + أ$_1$ د$_1$ = أ د$_1$ + ب جـ + ب$_1$ د$_1$



⟷ بالفرض ب (جـ$_1$ + د) + أ$_1$ د$_1$ = أ د$_1$ + ب جـ + ب$_1$ د$_1$

⟷ ب (جـ + د$_1$) + أ$_1$ د$_1$ = أ د$_1$ = أ د$_1$ + ب جـ + ب$_1$ د$_1$

⟷ ب جـ + ب د$_1$ + أ$_1$ د$_1$ = أ د$_1$ + ب جـ + ب$_1$ د$_1$

⟷ ب د$_1$ + أ$_1$ د$_1$ = أ د$_1$ + ب$_1$ د$_1$

⟷ (ب + أ$_1$) د$_1$ = (أ + ب$_1$) د$_1$

⟷ (ب + أ$_1$) = (أ + ب$_1$)

وهذه صحيحة بالفرض

هذا يوضح بأن عمليتي الجمع والضرب معرفتان تعريفاً جيداً على الصفوف وبالتالي فهما معرفتان على الأعداد الصحيحة

أن عمليتي الجمع والضرب المعرفتين على الأعداد الصحيحة (الصفوف) تحققان قوانين التجميع والإبدال والتوزيع وفي أدناه براهين بعض هذه القوانين:

أ. بالنسبة للجمع فإن قانوني التجميع والإبدال يتحققان لكون

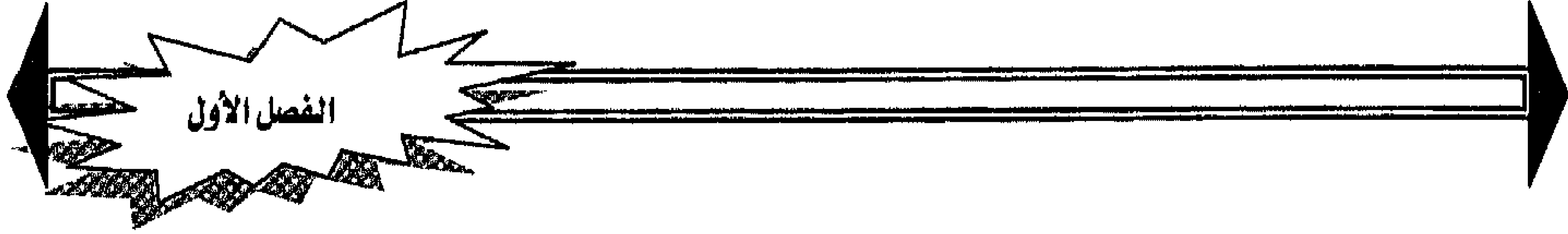
(أ، ب) + [(جـ، د) + (هـ،و) = (أ، ب) +(جـ + هـ، د + و) = (أ+ ج + هـ، ب + د + و)

((أ+ ب + (جـ، د) + (هـ، و) = (أ + جـ، ب+ د) + (هـ، و) =(أ+ جـ + هـ، ب+ د + و)

وكذلك:

(أ، ب) + (جـ، د) = (أ + جـ، ب+ د) = (جـ + أ، د+ ب) = (جـ، د) + (أ، د) ونترك للطالب أن يبرهن تحقق قانوني التجميع والإبدال بالنسبة للضرب. أما بالنسبة لقانون التوزيع فيتبرهن كما يلي:





(م، ب)، ((جـ، د) + (هـ، و)) = (م، ب). (جـ + هـ، د + و)

= (م (جـ + هـ) + ب (د + و)، م (د + و) + ب (جـ + هـ))

= (م جـ + م هـ + ب د + ب و، م د + م و + ب جـ + ب هـ)

= (م جـ + م هـ + ب د + ب و، + م د + م و + ب جـ + ب هـ)

= (م جـ + ب د ، م د + ب جـ) + (أ هـ + ب و، م و + ب هـ)

= (م، ب). (جـ، د) + (م، ب). (هـ، و)

وبنفس الطريقة نبرهن:

((م، ب + (جـ، د)). (هـ، و) = (م، ب) (هـ، و) + (هـ، د). (هـ، و)

(١-٣-٤) الصفر (The Zero)

نعرف مما سبق أن أي عددين طبيعيين م، ب يحققان إحدى العلاقات التالية:

أ = ب　　　أ > ب　　　ب> م

وفي ضوء هذه العلاقات فإن الزوج المرتب (م، ب) يمكن أن يكتب

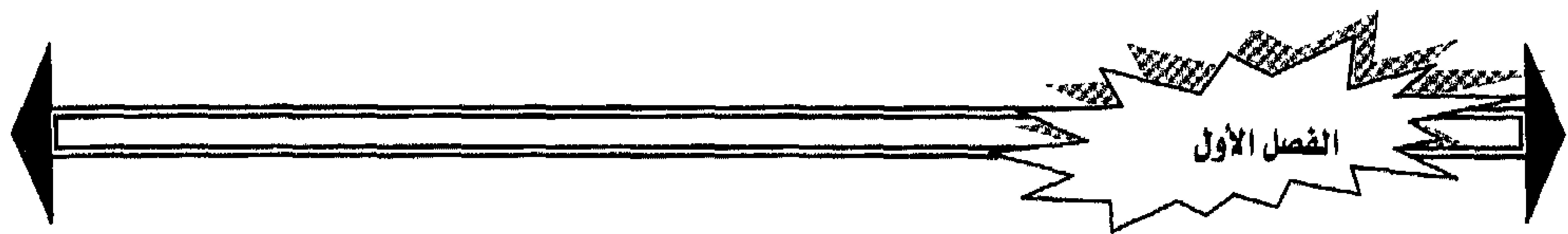
(م، م)، (م، م + س)، (ب + س، ب)

وإن الذي يهمنا هو الزوج (م، م) الذي يملك الموصفات التالية:

إذا كان لكل من م، ب، جـ عدد طبيعياً فإن:

أ. (م،م) = (ب، ب)





ب. (باستخدام التعريف وقانون الحذف) (م، م) = (ب، ج) ب = ج

هذا يعني بأن الأزواج المرتبة التي يتساوى فيها المسقطان تكون صفاً، هذا الصف يسمى العدد الصحيح صفر. الصفر أو الصف يمكن تمثيله ب [(م، م)] حيث م يمثل أي عدد طبيعي. ونرمز للصف [(م، م)] بالرمز ٠.

(٥-٣-١) صفات الصفر

لكل زوج مرتب (س، ص) تكون العلاقات التالية صحيحة:

أ. (س، ص) + (م، م) = (س، ص) أي أن الصفر عنصر محايد بالنسبة للجمع.

ب. (× س، ص) + (م، م) = (م، م)

هذه العلاقات تنتج من التعريف مباشرة لكون:

(س، ص) + (م، م) = (س + م، ص + م) = (س، ص)

(س، ص)، (م، م) = (م س + م ص، م س + م ص) + (م، م)

(٦-٣-١) مبرهنة

صفوف الأزواج (م، ب) حيث م > ب متشاكلة تقابلياً مع الأعداد الطبيعية

البرهان: لاحظ أن (س+ ب، ب) = (ص+ ج، ج) بالإضافة لذلك فإن:

(س + ب، ب) = (ص + ج، ج) فقط عندما س = ص هذا يعني أن هناك عدداً صحيحاً واحد فقط يمثل كل الأزواج (س+ ب، ب) حيث يمثل ب



أي عدد طبيعي و س هو ثابت، لكي نكمل البرهان فإننا سنعرف تقابلاً بين الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة من النمط (س + ب، ب) بأن نقرن العدد الطبيعي س مع الزوج المرتب (س + ب، ب) أي (س + ب، ب) ← س

بما أنه إذا كان:

(س + ب، ب) ↔ س

(ص + جـ، جـ) ↔ ص

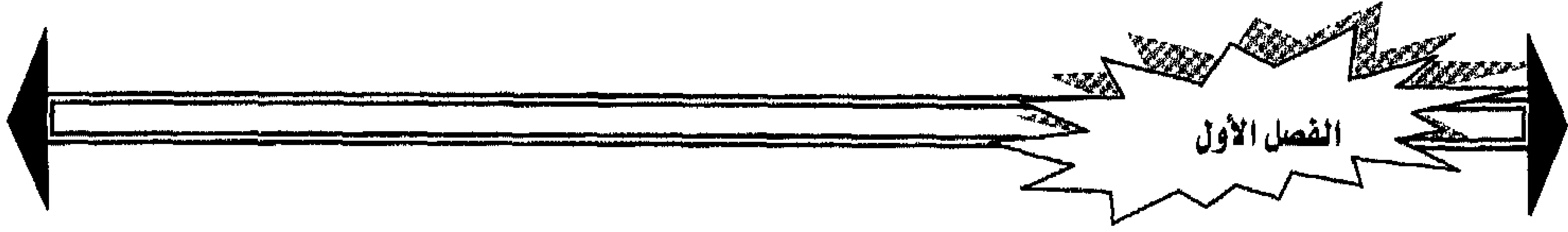
فإن: (س+ب،ب) + (ص+جـ،جـ) = (س+ص+ ب+جـ ، ب+جـ) ↔ س+ص

وكذلك:

(س+ ب، ب) × (ص + جـ، جـ) = (س ص + س جـ + ب ص+ ب جـ، س جـ + ص ب + ب ج + ب جـ) ↔ × س ص.

إذا التقابل يحافظ على عمليتي الجمع والضرب فهو إذاً تشاكل تقابلي بين صفوف الأزواج المرتبة (م، ب) حيث م > ب والأعداد الطبيعية. وعلى هذا الأساس يمكن اعتبار الأعداد الطبيعية مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة.

النوع الثالث والأخير من الأزواج (م، ب) حيث أن م < ب يمكن أن يكتب (م،م+ س). كما في حالة الأعداد الطبيعية فإن الأزواج المرتبة (م،م+ س) حيث يمثل أ أي عدد طبيعي و س ثابت يمثل عدداً صحيحاً واحداً فقط هذه الأعداد الصحيحة تسمى الأعداد الصحيحة السالبة.



(٧-٣-١) مبرهنة:

أ) إذا كانت (ا، ب) + (جـ، د) = (ا، ب) + (هـ، و)

فإن (جـ، د) = (هـ، و)

ب) إذا كان (ا، ب) (جـ، د) = (ا، ب) (هـ، و) وكأن

(ع، ع) ≠ (ا، ب) فإن (جـ، د) = (هـ، و)

البرهان:

أ) بما أن (ا، ب) + (جـ، د) = (أ + جـ، ب + د)

(ا، ب) + (هـ، و) = (ا + هـ، ب + و)

فإن (ا + جـ، ب + د) = (ا + هـ، ب+ و)

ومن تعريف المساواة نحصل على

ا + جـ + ب + و = ب + د + ا + هـ

وحسب قانون الحذف للأعداد الطبيعية ينتج:

جـ + و = د + هـ

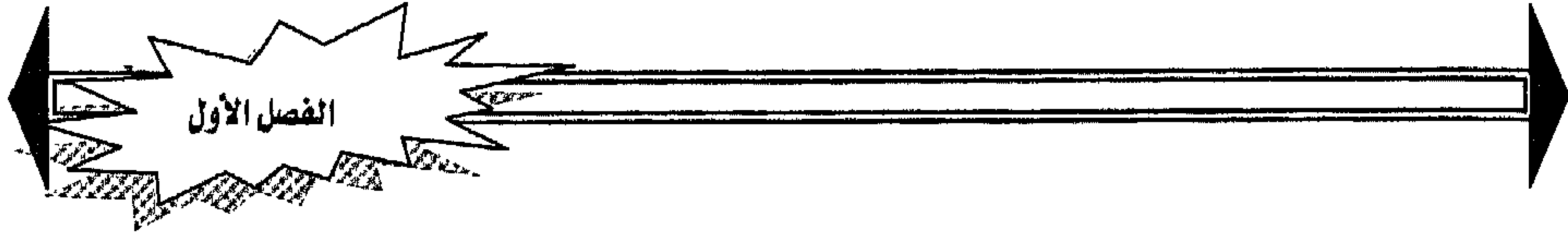
وهذا يعني (جـ، د) = (هـ، و) وهو المطلوب في الفرع الأول.

ب) بما أن:

(ا، ب) × (جـ، د) = (ا جـ + ب د، ا د + د جـ)

(ا، ب) (هـ، و) = (ا هـ + ب و، ا و + ب هـ)





فإن:

(م جـ + ب د+ م د + ب جـ) = (م هـ + ب و، م و + ب هـ)

ومن تعريف المساواة نحصل على:

م جـ + ب د + م و + ب هـ = م د + ب جـ + أ هـ + ب و

الآن لو كان (م، ب) عدداً صحيحاً موجباً فإن هذا يعني $a = b + h$
وبالتالي فإن المساواة تكون:

(ب+ h) جـ + ب د + (ب+ h) و+ ب هـ = (ب+h) د + ب جـ + (ب+h) هـ +ب و

وباستخدام قانوني التجميع والحذف ينتج:

h جـ + h و= h s + h و ← جـ + هـ = د + هـ ← (جـ، د) =(هـ ، و)

وبنفس الطريقة نبرهن (جـ، د) = (هـ، و) عندما يكون (م، ب) عدداً صحيحاً سالباً حيث يكون م+ h = ب

(٨–٣–١) مبرهنة

المعادلة (م، ب) + (س، ص) = (جـ، د) لها حل وحيد

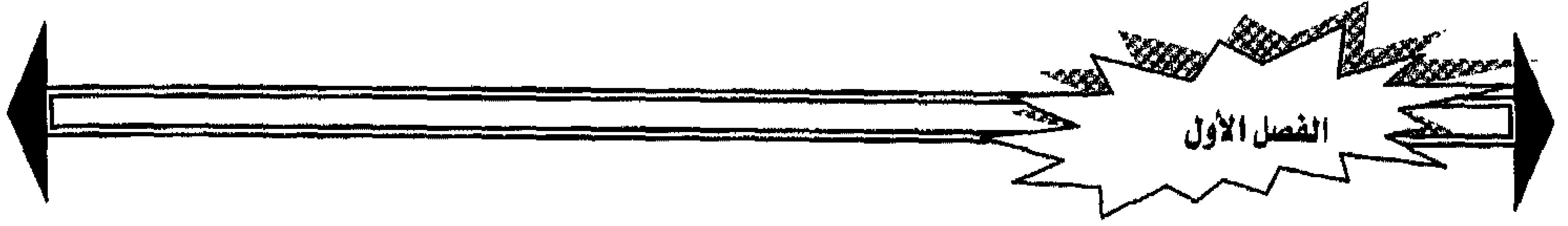
البرهان:

بما أن:

(م، ب) + (ب + جـ، م + د) = (م + ب + جـ و ب+ م + د) = (جـ،د)

فإن (ب+ جـ، م + د)، حل للمعادلة.





لنفرض ﻫ (U، v) حل آخر للمعادلة إذا

(ﻫ، ب) + (   ) = (ﻫ، ب) + (ب+ جـ، ﻫ + د)

وباستخدام قانون الحذف ينتج

(   ) + (ب + جـ، ﻫ + د)

الحل (ب + ﻫ و جـ + د) يعرف بالفرق (جـ، د) – (ﻫ، ب) والعملية التي تؤديه تسمى الطرح بشكل خاص فإن الحل (س١، ص) للمعادلة:

(ﻫ، ب) + (س، ص) + (ع، ع) هو

(Z,Z) - (ﻫ، ب) + (Z+ ب، Z + ﻫ) = (ب، أ)

نرمز للزوج المرتب (ﻫ، ب) بالرمز "- (ﻫ، ب)" ويسمى نظير (ﻫ، ب) بالنسبة لعملية الجمع لتسهيل العمل فإننا سنرمز من الآن فصاعداً للعدد الصحيح برمز مفرد مثلاً "ص" ونظيره بالرمز " – ص" والصفر بالرمز "٠"

(٩ - ٣-١) التباين

يكون العدد الصحيح أ أصغر من العدد الصحيح ب أو العدد الصحيح ب أكثر من العدد الصحيح ﻫ إذا وفقط إذا كان (ب- ﻫ) عدداً طبيعياً هذه العلاقة تكتب ﻫ < ب أو ب > ﻫ من تعريف التباين يمكن برهنته:

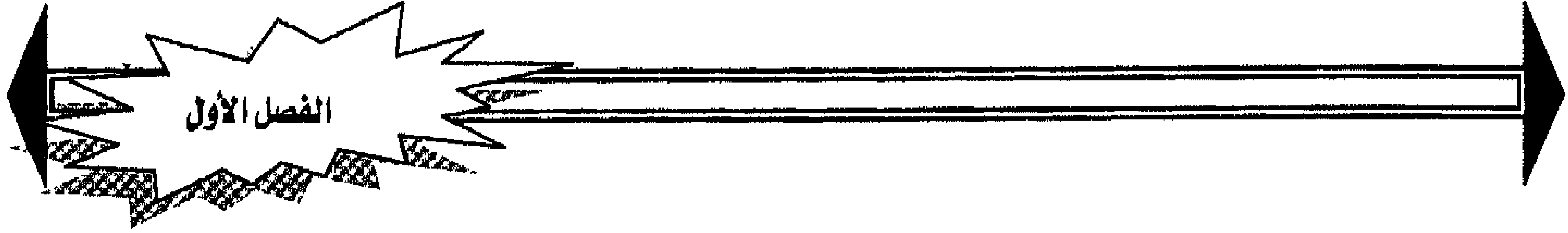
أ) إذا كان ﻫ < ب و ب < جـ فإن أ < جـ

ب) إذا كان ﻫ < ب فإن ﻫ + جـ < ب + جـ

ج) إذا كان ﻫ < ب و جـ > ٠ فإن ﻫ جـ < ب جـ

د) إذا كان ﻫ < ب و ٠ < جـ فإن أ جـ > ب جـ





(١٠-٣-١) القيمة المطلقة:

نعرف بأن أي عدد صحيح، م، يحقق أحدى العلاقات التالية:

أما − م >٠ أو م > ٠ أو م = ٠

وفي ضوء هذه العلاقات نعرف القيمة المطلقة للعدد الصحيح م تكتب |م|، كما يلي:

|م| = صفر عندما م = صفر

م عندما م > ٠

−م عندما م < ٠

(١١-٣-١) مبرهنة:

إذا كان كل من م، ب عدداً صحيحاً فإن:

أ) |م| . |ب| = |م ب|

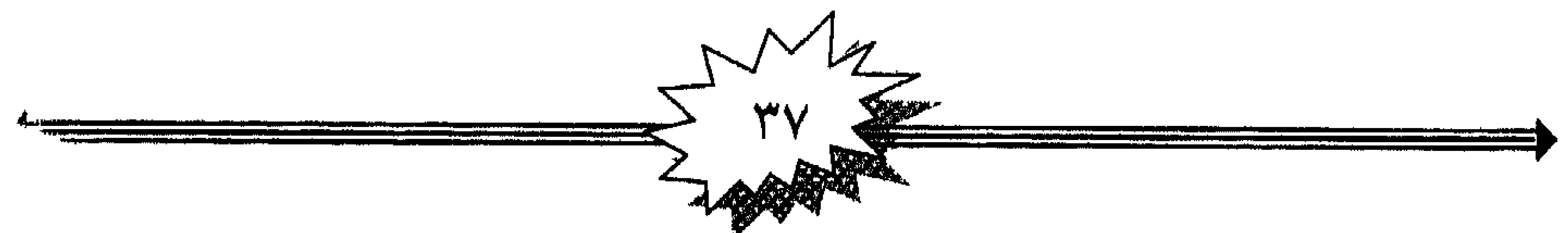
ب) |م+ب| ≤ |م| + |ب|

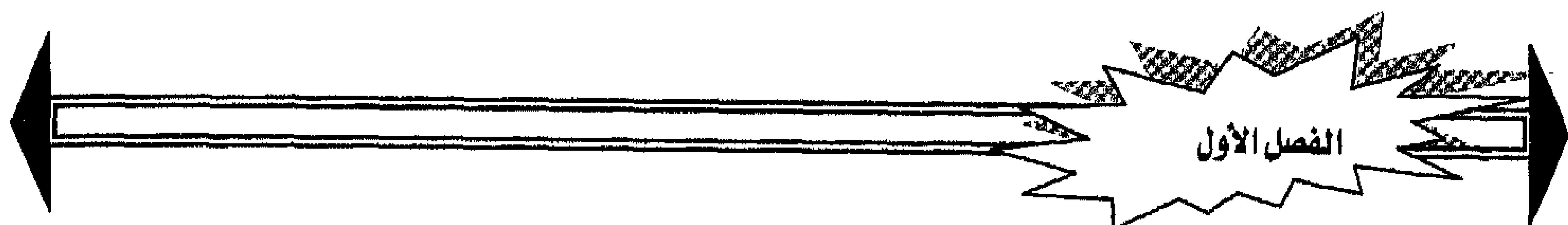
البرهان:

إذا كان أحد العددين م، ب (أو كلاهما) صفر فإن المساواة تتحقق فوراً في العلاقتين وكذلك إذا كان العددان موجبين أو كانا سالبين:

أما في حالة الاختلاف مثلاً إذا كانت م موجباً وب سالباً فإن العلاقتين تتحققان من خلال ملاحظة أن م = |م|، − ب= |ب| وإن:

(−س) ص = س (−ص) = س ص





كذلك:

- (ﺃ + ب) > ﺃ – ب عندما يكون ﺃ + ب سالباً

ﺃ + ب < ﺃ – ب عندما يكون ﺃ + ب موجباً

تمارين (٣-١)

برهن كلاً مما يأتي:

١. – (- ص) + ص

٢. (- س) (- ص) = س ص

٣. (- س) ص = س (- ص) = - س ص

٤. – (س + ص) = - س+ (-ص)

٥. س (ص – ع) + س ص _ س ع

٦. (س – ص) + (ص – ع) + س – ع

٧. إذا كان س ص= ١ فإن س = ∓١ و ص = ∓١

(٤ -١) مستحة الأعداد الصحيحة

لاحظنا مما مضى بأن الأعداد الصحيحة مغلقة بالنسبة لعمليات الجمع والضرب والطرح أما بالنسبة لعملية القسمة فإننا نلاحظ بأنها غير مغلقة.

نقول بأن العدد الصحيح ب ≠صفر بقسم العدد الصحيح ﺃ أو العدد الصحيح ﺃ قابل للقسمة على العدد الصحيح ب إذا وجد عدد صحيح ﺟ بحيث



أ = ب جـ يعبر عن هذه العلاقة بكتابة أ | ب ونقول أيضاً بأن أ هو أحد المضاعفات ب.

أما إذا كان ب لا يقسم أ فإننا نكتب أ × ب

بما أن أ ×٠ = ٠ صحيحة لكل الأعداد الصحيحة أ. فإن الأعداد الصحيحة جميعها تقسم العدد الصحيح ٠، للطالب أن يتحقق من كون عملية القسمة تحقق الخواص التالية:

١. الإنعاكسية: أ | أ

٢. التعدي: إذا كان ب|أ وكان جـ |ب فإن جـ |أ

٣. إذا كان ب|أ و جـ | أ فإن (أ س + ب ص) |أ

لأي عددين صحيحين س، ص.

٤. إذا كان ب|أ وكان صفر > أ وصفر > ب فإن أ ≥ ب

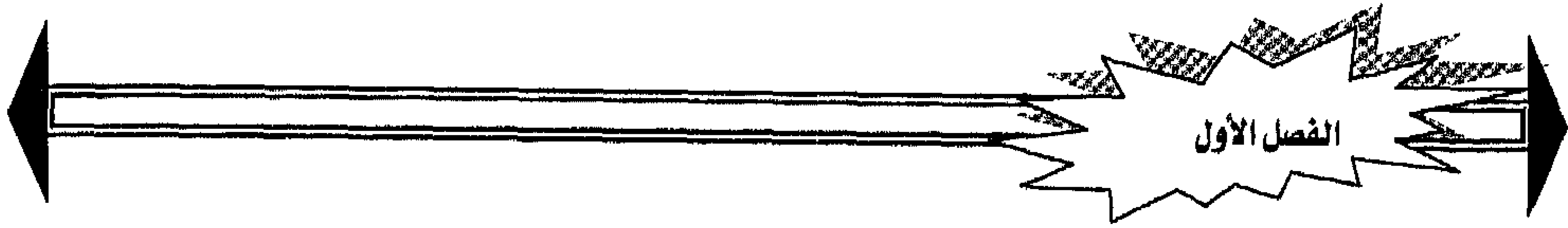
٥. إذا كان ب|أ فإن ب ± | أ ±

لأي اختيار للأشارة.

(١ - ٤-١) مبرهنة

إذا كان أ، ب عددين صحيحين و ب ≠ صفر فهناك زوج واحد فقط من الأعداد الصحيحة أي بحيث أ = ي ب + ر حيث صفر ≥ ر < | ب |

العدد الصحيح، يسمى باقي القسمة.



البرهان:

مجموعة الأعداد الصحيحة {أ – ب س}، حيث يمثل س أي عدد صحيح تحتوي في الأقل على عدد صحيح واحد غير سالب وبشكل أكثر تحديداً فإن العدد أ - |أ|ب عندما ب < ٠ أو العدد أ – (-|أ|ب) عندما ب >٠ يكون غير سالب لكون:

ب <٠ ⟵ ب ≥-١ ⟵ ب|أ| ≥ -|أ| ≥ أ

وكذلك:

ب > ٠ ⟵ ب ≤ ١ ⟵ -|أ|ب ≥ -|أ| ≥ أ

إذا المجموعة تحتوي أما على الصفر أو على أصغر عدد صحيح موجب

ليكن ر= أ-ي ب أصغر عدد صحيح غير سالب موجود في المجموعة

إذا كانت ر≥ ٠ و ر ≥ |ب| فإن:

صفر ≥ ر- |ب|= أ – ي ب - |ب| < أ - أ ب= ر

وهذا تناقض لأننا حصلنا على عدد غير سالب أصغر من ر وهو من النمط أ – ب س

إذا |ب| < ر وبذلك يتحقق وجود زوج من الأعداد الصحيحة ر ي بحيث أن أ = ي ب + ر حيث أن ٠ ≥ ر≥ |ب| . بقي أن نبرهن بأن هذا الزوج وحيد لنفرض أن (يَ . رَ) زوج آخر من الأعداد الصحيحة بحيث أ = يَ ب + رَ حيث |ب| < رَ ≥ صفر

إذا أ=ب يَ+ رَ= ب ي + ر ⟵ رَ–ر=(ي–يَ)ب ⟵ ب(رَ–ر)



ولكن | رَ−ر | < |ب|

إذا رَ−ر = ٠ ← رَ = ر

وبما أن ب ≠ صفر إذا يَ−ي = ٠ ← يَ = ي

(١-٤-٢) تعريف

العدد الطبيعي أ يسمى عدداً أولياً إذا كان أكبر من واحد ولا يقبل القسمة إلا على أ و ١ ±.

وتسمى ± أ و ١ ± قواسم تافهة وأي عدد أولي يقسم العدد الصحيح ب يسمى قاسماً أولياً للعدد ب.

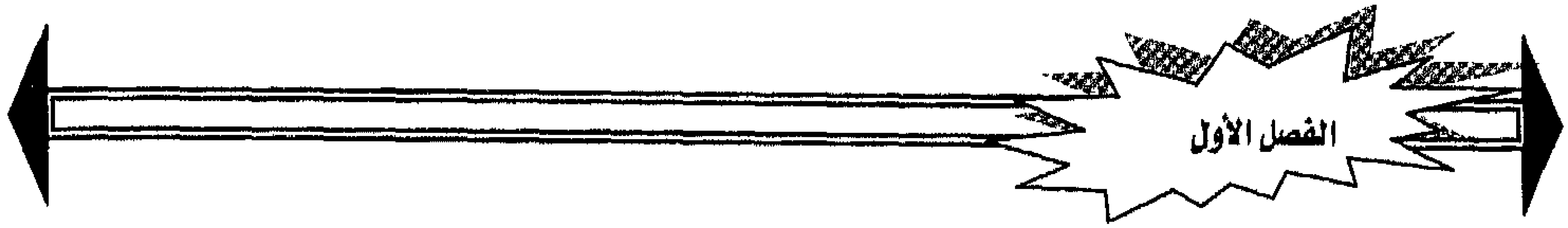
(١-٤-٣) مبرهنة تمهيدية:

لكل عدد طبيعي ١ > ب قاسم أولي واحد على الأقل.

البرهان:

لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكون أكبر من العدد ١ وتقسم ب لا شك أن هذه المجموعة ليست خالية وذلك لأن ١ > ب و ب/ب وبالتالي فإنها تحتوي على ب في الأقل.

ليكن أ أصغر عدد طبيعي في المجموعة ط، إذا لم يكن أ عدداً أولياً فيوجد عدد طبيعي ١ < ي بحيث أن أ / ي وبما أن ب/ أ إذا باستخدام خاصية التعدي ينتج أن ب/ ي وهذا مناقضاً لفرضيتنا القاضية بأن أ أصغر عدد طبيعي في المجموعة ط.



(١-٤-٤) مبرهنة:

يوجد مالا نهاية من الأعداد الأولية

البرهان لتكن:

ط = { ل١، ل٢، .... و لن }.

مجموعة منتهية من الأعداد الأولية، سنبرهن وجود عدد أولي لا ينتمي لهذه المجموعة لتكن{ ل١، ل٢، .... و ل١ لن} = م.

ومن المبرهنة (٣-٤-١) لنستنتج بأن m العدد قاسماً أولياً لنسمي P إن P يختلف عن كل P_1, P_2, P_3, ... وذلك لكون P يقسم m بينما كل من ل١... ل لا يقسم م حتى يكون باقي القسمة ١ في كل حالة وهذا يعني بأن ل لا ينتمي ط.

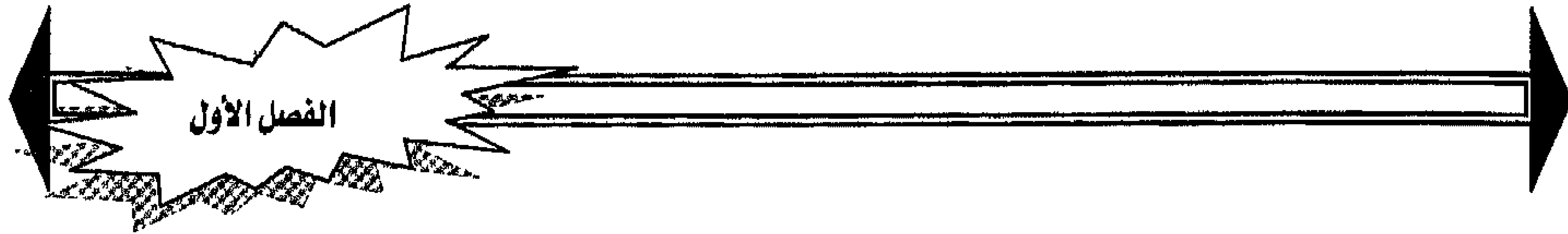
(٥-٤-١) القاسم المشترك الأكبر

العدد الصحيح يسمى مشتركاً للعددين الصحيحين (ﻫ، ب) إذا كان د/ ﻫ و د/ ب.

القاسم المشترك للعددين الصحيحين ﻫ، ب يسمى قاسماً مشتركاً أعظماً (ق، م، ﻫ) إذا كان قابلاً للقسمة على أي قاسم مشترك للعددين ﻫ، ب أي إذا كان جـ قاسماً مشتركاً للعددين ﻫ، ب فإن جـ / د.

من الواضح أنه إذا كان أحد العددين صفراً فإن الآخر سيكون قاسماً مشتركاً أعظماً للاثنين أما إذا كان كل من العددين صفراً فلا يوجد قاسم مشترك أعظم وذلك لأن الأعداد الصحيحة جميعها (عدا الصفر) تقسم الصفر. ومن





الممكن تعميم تعريف القاسم المشترك الأعظم لأكثر من عددين صحيحين وكما يلي:

العدد الصحيح د يسمى قاسماً مشتركاً للأعداد الصحيحة $أ_1$، $أ_2$،......، $أ_ن$ إذا كان د|$أ_ت$، لكل ت= ١، ٢، ......، ن

كما أن د يسمى قاسماً مشتركاً أعظماً إذا كان د قابلاً للقسمة على أي قاسم مشترك للأعداد الصحيحة $أ_1$، ....، $أ_ن$ أي إذا كان جـ قاسم مشترك للأعداد الصحيحة أعلاه فإن جـ / د عندما يكون د قاسماً مشتركاً للأعداد الصحيحة ن ≥ ٢، $أ_1$، $أ_2$،......، $أ_ن$، فإننا نعبر عن ذلك بكتابة د = ($أ_1$، $أ_2$،......، $أ_ن$) من الواضح أنه إذا كان كل من د، ′د قاسماً مشتركاً أعظماً فإن د/ ′د، د/ ′د وهذا ينتج د = ± ′د.

(٦-٤-١) مبرهنة الخوارزمية الأقليدية

لأي عددين صحيحين مختلفين عن الصفر، قاسم مشترك أعظم موجب

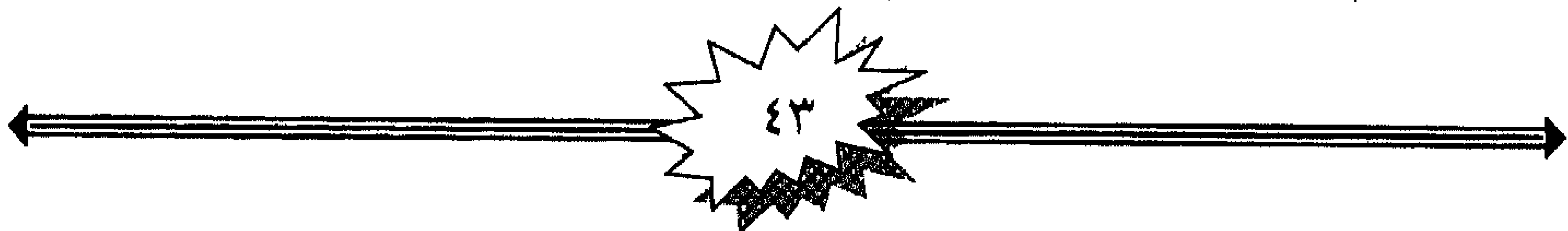
البرهان:

إذا كان كل من د′، د قاسماً مشتركاً أعظماً فإن د = ± د′ إذا سنفترض أن أ، ب عددان صحيحان موجبان:

ليكن أ = ك ب + ر حيث أن ٥ ≥ ر > ب

إذا كانت ١ = صفر فإن ب ستكون (ق م، أ) للعددين أ، ب

أما إذا كانت ١ ≠ صفر فسنبرهن بأن (أ، ب) = (ب، ر)



ليكن (أ، ب) = د، (ب، ر) = د′.

وبذلك فإن د يقسم (أ، ب) وباستخدام خواص القسمة فإن د يقسم أ – ك ب ولكن ١= أ - ك ب إذا، د يقسم ر أيضاً وهذا يعني بأن د هو قاسم مشترك للعددين الصحيحين ر، ب وبالتالي فإن د′/ د لنفس الأسباب فإن د′ يقسم ر، ب وكذلك أ = ك ب + ر وهذا يعني بأن د′ قاسم مشترك للعددين الصحيحين وبالتالي د/ د′ إذا د′= د.

بهذا نكون قد اخترنا المسألة إلى إيجاد (ق، م، أ) للعددين الصحيحين ب، ر بدلاً من، ب نطبق الآن خوارزمية القسمة حيث نحصل على ب = $ك_{١}$ ر + $ر_{١}$ حيث ٠ > $ر_{١}$ ≥ ٥

إذا كان $ر_{١}$ = صفر فإن ر سيكون (ق. م. أ) للعددين الصحيحين ب و ر أما إذا كان $ر_{١}$ ≠ صفر فسنبرهن بنفس الطريقة بأن (ب، ر) = (ر، $ر_{١}$) ومن ثم نسمي بالأسلوب نفسه لنحصل على المعادلات الآتية:

أ = ك ب + ر ، ب > ر > صفر

ب = $ك_{١}$ ر + $ر_{١}$ ، ر > $ر_{١}$ > صفر

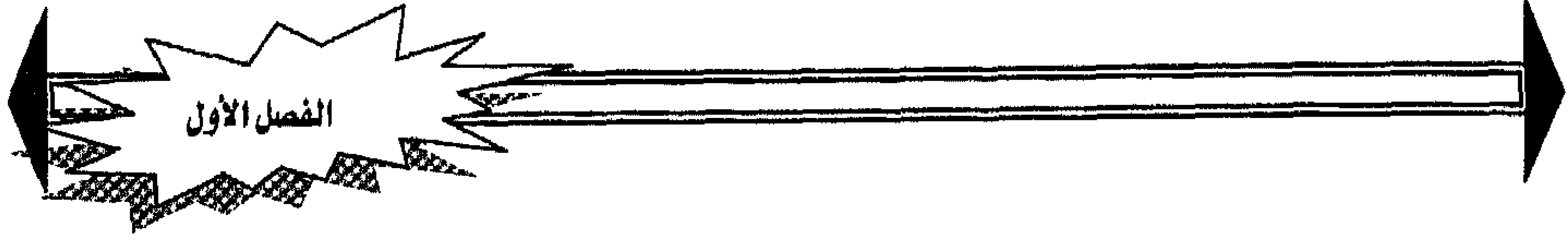
ر = ك $ر_{١}$ + $ر_{٢}$، $ر_{١}$ > $ر_{٢}$ > صفر

$ر_{١}$ = ك $ر_{٢}$ + $ر_{٣}$، $ر_{٢}$ > $ر_{٣}$ > صفر

$ر_{٢}$ = ك $ر_{٣}$ + $ر_{٤}$، $ر_{٣}$ > $ر_{٤}$ > صفر

⋮ ⋮ ⋮

$ر_{م}$ = $ك_{م+٢}$ $ر_{م+١}$ + $ر_{م+٢}$



بما أن $ر_{م}$ تكون مجموعة تنازلية من الأعداد غير السالبة فإنها ستصل حتماً إلى الصفر حيث يكون هناك $ر_{ن+1}$ = صفر إذاً:

$ر_{ن-2} = ك_{ن} ر_{ن-1} + ر_{ن}$ $\qquad$ $ر_{ن-1} > ر_{ن} >$ صفر

$ر_{ن-1} = ك_{ن+1} ر_{ن}$

وبذلك يكون:

$(أ، ب) = (ب، ر) = (ر، ر_{1}) = (ر_{1}، ر_{2}) = (ر_{2}، ر_{3}) = ...$

$= (ر_{ن-1}، ر_{ن}) = ر_{ن}$ أي أن القاسم المشترك الأعظم للأعداد الصحيحة، ب هو $ر_{ن}$.

(١-٤-٧) مبرهنة

إذا كان د = (، ب) فلابد من وجود عددين صحيحين

د = م أ + ن ب

البرهان:

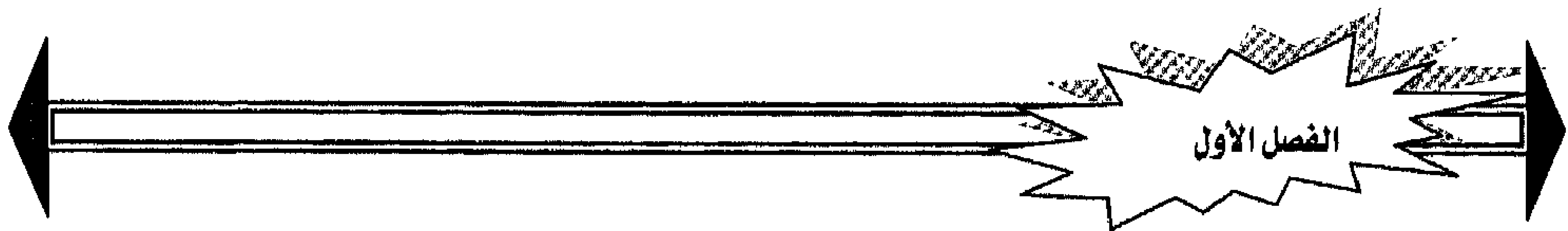
نمثل باقي القسمة $ر_{م}$ في الخوارزمية الأقليدية بدلالة أ، ب وكما مبين أدناه:

$ر = أ - ك ب = أ + (-ك) ب$

$ر_{1} = ب - ك_{1} ر = ب - ك_{1} (أ + (-ك) ب) = (-ك_{1} أ) + (١ + ك ك_{1}) ب$

نستمر بنفس الأسلوب حتى نصل إلى تمثيل $ر_{ن}$ بدلالة أ، ب.





بإمكان الطالب أن يتحقق من كون المبرهنتين السابقتين تتحققان لأي عدد من الأعداد الصحيحة أ١، أ٢،......، أن باستخدام الاستقراء الرياضي.

مثال(٤): جد قاسم المشترك الأعظم للعددين ٢٥٢، ٢٩٥ ثم مثل بدلالة هذين العددين

الحل: بما أن

٥٩٥ = ٢ (٢٥٢) + ٩١

٢٥٢ = ٢ (٩١) + ٧٠

٩١ = ٧٠ + ٢١

٧٠ = ٣ (٢١) + ٧

٢١ = ٣ (٧)

فإن (٥٩٥، ٢٥٢) = ٧

الآن نجد م، ن بحيث أن ٧ = ٢٥٢ م + ٥٩٥ ن

بما أن:

٩١ = ٥٩٥ ـ ٢ (٢٥٢)

٧٠ = ٢٥٢ ـ ٢ (٩١)

= ٢٥٢ ـ ٢ (٥٩٥ ـ ٢ (٢٥٢))

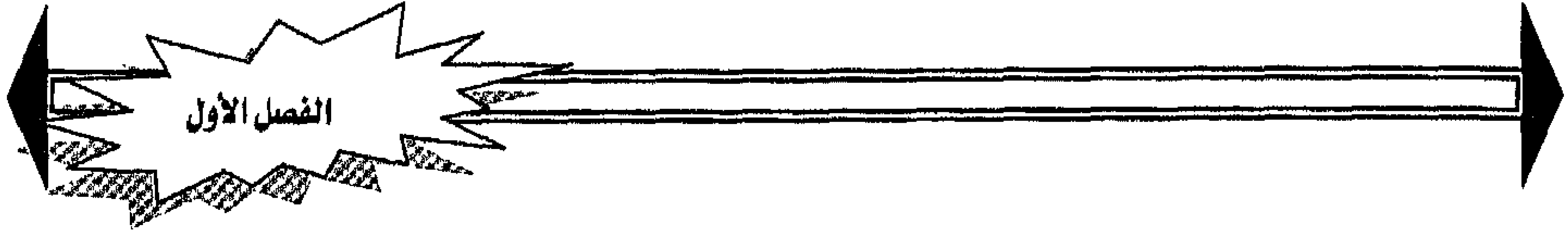
= ٥ (٢٥٢) ـ ٢ (٥٩٥)

٢١ = ٣ (٥٩٥) ـ ٧ (٢٥٢)

٧ = ٧٠ ـ ٣ (٢١) = ٢٦ (٢٥٢) ـ ١١ (٥٩٥)

فإن: ن = -١١





$م = ٢٦$

والعددان م، ن ليسا الوحيدين حيث أن:

$٧ = ٦٢١ (٢٥٢) - ٢٦٣ (٥٩٥)$

مثال(٥): برهن بأنه إذا كان صفر > م فإن

(م ﺃ و م ب) = م (ﺃ، ب)

الحل:

د= (ﺃ،ب)/ ⟵ (د/ ﺃ) ﺃ ∧ (د/ ب) ⟵ (م د/ م ﺃ) ∧ (م د/ م ب)

⟵ م د = (م ﺃ، م ب) = م (ﺃ، ب)

الأعداد الصحيحة ﺃ١، ﺃ٢،......، ﺃن تسمى أعداداً أولية معاً

إذا كان ١ = (ﺃ١، ﺃ٢،.....، ﺃن) وحسب المبرهنة (١-٤-٧) فإن:

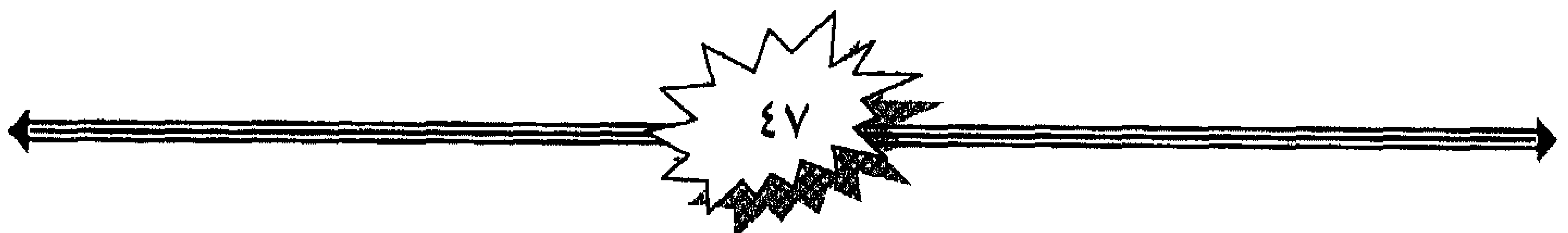
١ = س١ ﺃ١ + س٢ ﺃ٢ + ... + سن ﺃن حيث أن س١، س٢، ....، سن أعداد صحيحة ملائمة.

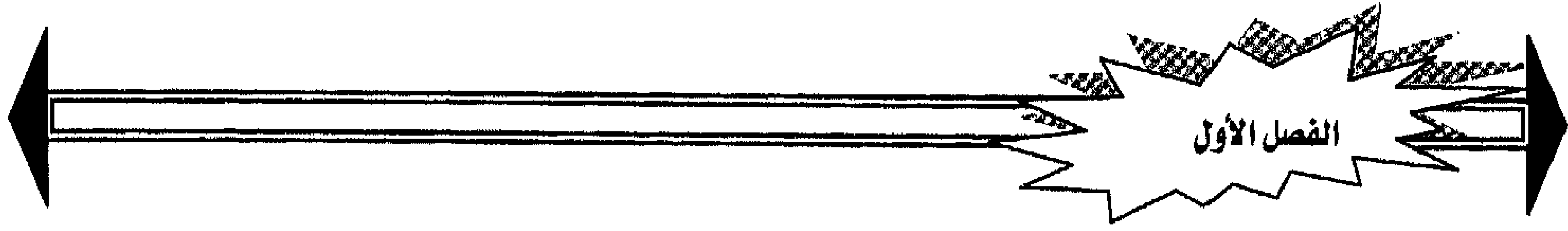
(١-٤-٨) مبرهنة تمهيدية:

إذا كان ل عدد أولي وكان ﺃ، ب عددين صحيحين بحيث ل/ ﺃ ب فإن ل/ ﺃ أو ل/ ب

البرهان: نفرض أن ل × ﺃ سنبرهن بأن ل/ب

بما أن ل × ⟵ (ل، ﺃ) = ١ ⟵ س ﺃ + ص ل = ١





⟵ ب = س أ ب + ص ل ب

إذاً ل/ أ ب لكون ب/ أب بالفرض كما أن ل/ ص ل ب حيث ينتج أن:

ل/ (س أ ب + ص ل ب) = ب

بالإمكان تعميم هذه المبرهنة التمهيدية لأكثر من عددين صحيحين حيث تكون كما يلي:

إذا كان حاصل ضرب الأعداد الصحيحة $أ_١$، $أ_٢$،......، $أ_ن$ قابلاً للقسمة على ل حيث أن ل عدد أولي فإن أحد هذه الأعداد، على الأقل يقبل القسمة على ل.

(٩-٤-١) مبرهنة التحليل الوحيد:

يمكن تمثيل كل عدد طبيعي ١ > م بحاصل ضرب أعداد أولية مختلفة، $ل_١^{١}$, $ل_٢^{٢}$, ... ,$ل_ن^{ن}$ حيث أن $و_١$، $و_٢$ .....، $و_ن$ تمثل قوي الأعداد الأولية يكون هذا التمثيل وحيداً إذا أهملنا ترتيب الأعداد الأولية.

البرهان:

سنبرهن أولاً أننا نستطيع تمثيل م كحاصل ضرب لأعداد أولية باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي.

من الواضح أن المبرهنة صحيحة عندما يكون م عدداً أولياً بشكل خاص فإن المبرهنة صحيحة عندما م=٢.



نفترض أننا نستطيع تمثيل الأعداد الصحيحة التي تزيد على أ وتقل عن م على شكل حاصل ضرب أعداد أولية، سنبرهن أن م يمكن تمثيله أيضاً على شكل حاصل ضرب أعداد أولية باستخدام (٣-٤-١) فإن هناك على الأقل عدد أولي $ل_1$ يقسم م وهذا يعني بأن هناك عدداً طبيعياً $م_1$ أصغر من م بحيث م = $م_1$ $ل_1$ إذا كان م١ = ١ فإن م = ل١ والمبرهنة تكون صحيحة.

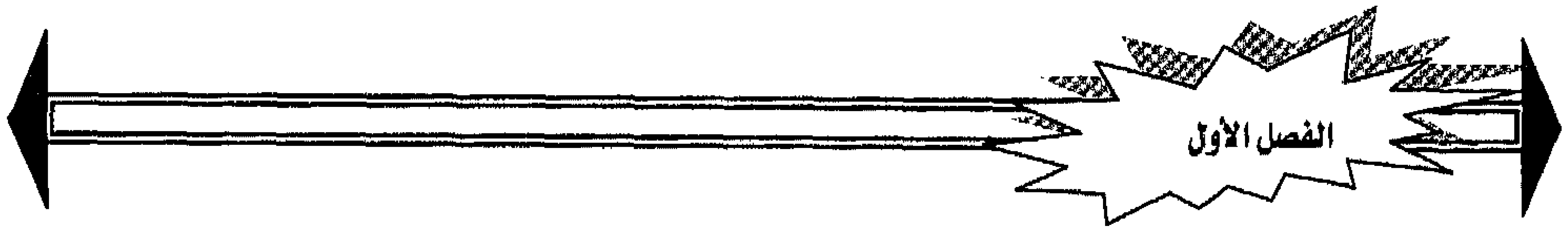
أما إذا كان م> $م_1$ >١ فإن $م_1$ وحسب فرضية الاستقراء الرياضيين يمكن تمثيله على شكل حاصل ضرب أعداد أولية $م_1$ = $ل_2$، $ل_3$، .... $ل_ن$ وبالتالي فإن م = $ل_1$، $ل_2$، ....، $ل_ن$ بقي أن نبرهن بأن هذا التمثيل وحيد إذا أهملنا ترتيب الأعداد الأولية $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$.

ليكن م= $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$ = $ك_1$، $ك_2$، .... $ك_ن$

تمثيلاً للعدد الطبيعي م حيث كلاً من $ل_ز$، $ك_ز$ تمثل عدداً طبيعياً علينا أن نبرهن الآن بأن ن =ز وبأن الأعداد الأولية $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$ هي نفسها الأعداد الأولية $ك_1$، $ك_2$، .... $ك_ن$ إذا أهملنا الترتيب، سيكون البرهان بالاستقراء الرياضي أيضاً، إذا كان ن = ١ فإن العبارة صحيحة حيث أن العدد الأولي لا يمكن تحليله إلى أعداد أولية وبذلك فإن م= $ك_1$ = $ل_1$ نفترض بأن حاصل ضرب الأعداد الأولية التي عددها أقل من ن لها تمثيل واحد فقط إذا أهملنا الترتيب.

علينا أن نبرهن بأن هذا صحيح عندما يكون عدد الأعداد الأولية يساوي ن ليكن $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$ = $ك_1$، $ك_2$، .... $ك_ن$.

من الواضح أن الجانب الأيمن يقبل القسمة على ل وبالتالي فإن الجانب الأيسر قابل للقسمة على $ل_1$ إذاً يوجد على الأقل عدد أولي واحد في الجانب



الأيسر يقبل القسمة على $ل_1$ وليكن هذا العدد $ك_1$ مثلاً (بدون التأثير على عمومية الحل). لكن $ك_1$ عدد أولي إذا $ل_1 / ك_1$ $ل_1 = ك_1$.

وباستخدام خاصية الحذف ينتج:

$ل_2$، $ل_3$، ...، $ل_ن$ = $ك_1$، $ك_2$، ... $ك_ن$

حيث تكون الأعداد الأولية في الجانب الأيسر أقل من ن وباستخدام فرضية الاستقراء الرياضي فإن ن-١ = ز-١ وإن الأعداد الأولية $ل_2$، $ل_3$، ...، $ل_ن$ هي نفس الأعداد الأولية إذا أهملنا $ك_2$، $ك_3$، .... $ك_ن$ الترتيب وبذلك فإن:

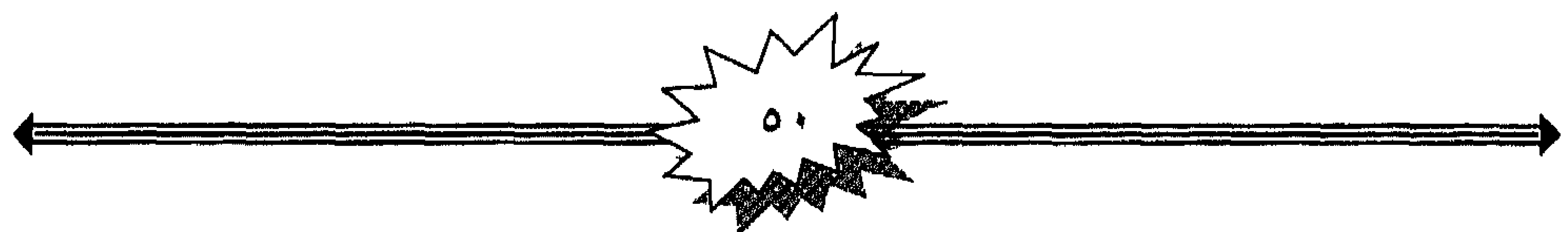
م = $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$

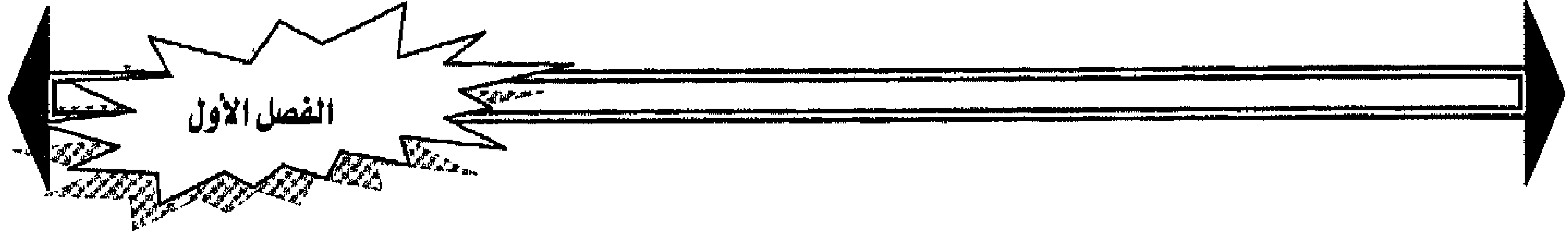
هو التمثيل الوحيد إذا أهملنا ترتيب الأعداد الأولية:

من الواضح بأنه لا يشترط أن تكون الأعداد الأولية $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$ مختلفة ولذلك فإننا بتجميع الأعداد الأولية المتشابهة وتمثيلها بعدد أولي واحد مرفوع للقوة التي تمثل عدد وأن تكرار ذلك العدد الأولي نكون قد برهنا المبرهنة بشكل كامل.

الأعداد الأولية $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$ تسمى أحياناً بالعوامل الأولية للعدد الصحيح م، إن من الملائم استخدام الرمز $م = \prod_{ل} ل$ لنعبر عن تمثيل م كحاصل ضرب لعوامله الأولية حيث أن ل تمر على الأعداد الأولية كافة ولكن $\alpha_ل$ = صفر عندما ل/ م

إذا كان:





$$ﺃ = \prod ل^{\alpha ل}$$

$$ب = \prod ل^{\beta ل}$$

فإن ن (ﺃ، ب) = $\prod_{ل}$ (ل)$^{\gamma ل}$ حيث أن:

γ ل = أصغر (αل، $\beta_{ل}^{ل}$)

القاسم المشترك ك الأعظم للعددين الصحيحين ﺃ، ب.

كما أن حاصل الضرب

١ = $\prod_{ل}$ ل$^{\gamma ل}$ حيث أن

ز$_{ل}$ = أكبر (αل، β ل)

يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين ﺃ، ب.

تمارين (٤-١)

١) جد (ﺃ، ب) في حالة وجود عددين صحيحين س، ص بحيث أن:

١) س ﺃ + ص ب = ١

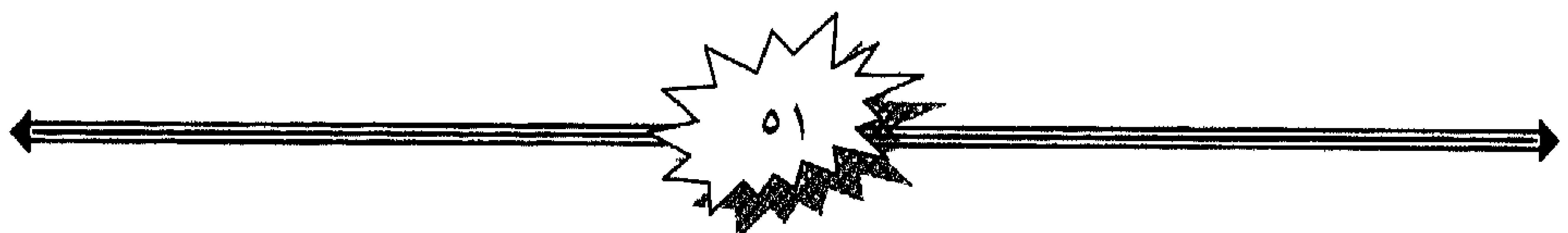
٢) س ﺃ + ص ب =٣

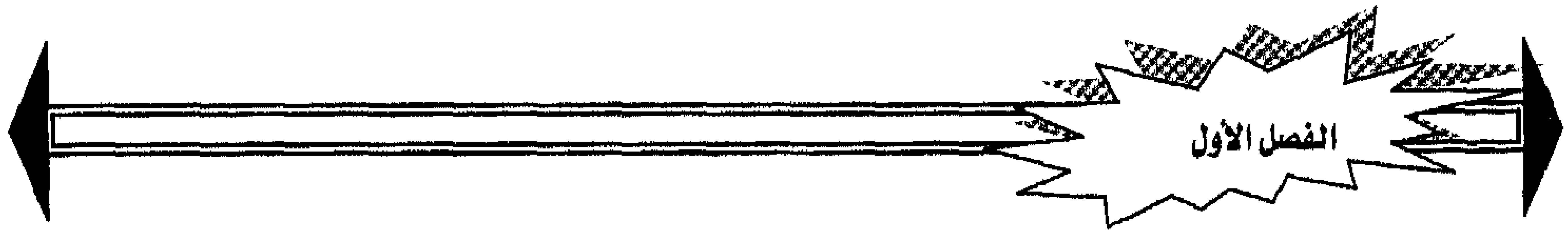
٢) إذا كان (ﺃ، ب) =د و ﺃ = ﺃ$_{١}$ د و ب = ب$_{١}$ د فبرهن أن (ﺃ$_{١}$، ب$_{١}$)= ١

٣) إذا كان (ﺃ، ب) = ١ و ﺃ |د و ب|جـ فإن ﺃ ب| جـ >

٤) إذا كان (ﺃ، ب) = ١ فبرهن أن(ﺃ+ ب، ﺃ- ب) يساوي ١ أو ٢

٥) إذا كان (جـ، د) = ١ فبرهن أن (جـ^{ن}، د) = ١ حيث يمثل ن عدداً طبيعياً





(٥-١) التطابق وصفوف الباقي

ليكن م عدداً طبيعياً أكبرمن واحد وإذا كان(ٲ، ب) عددين صحيحين بحيث ٲ، ب يقبل القسمة على م فإننا نكتب:

ٲ ≡ ب (mod م) حيث mod هي باقي القسمة.

وتقرأ (يطابق ب (مع م) أي بالنسبة للمعيار م.

سنبرهن بأن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

أ) الانعكاسية: من الواضح أن ٲ ≡ ٲ (mod م) لأن ٲ - ٲ = صفر والصفر يقبل القسمة على م.

ب) التناظر أو التماثل: إذا كان ٲ ≡ ب (mod م) فإن م| (ٲ- ب) وهذا ينتج م| (ب- ٲ) أي أن ب ≡ ٲ (mod م).

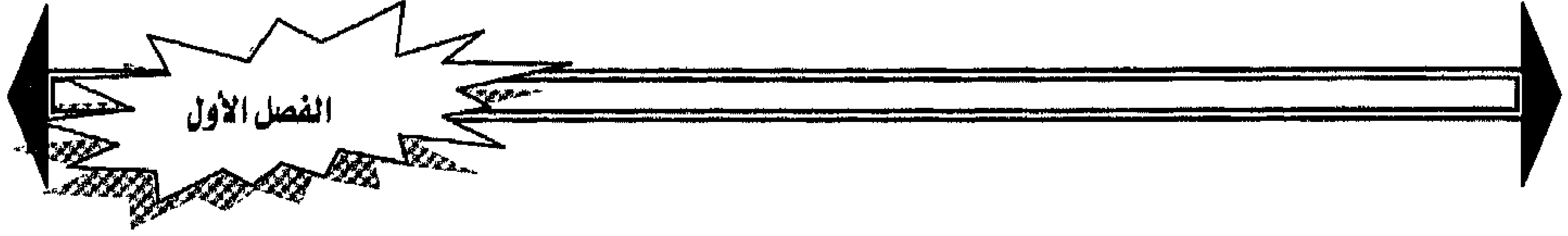
جـ) التعدي: إذا كان ٲ ≡ ب (mod م) فإن م| (ٲ- ب) وإذا كان ب ≡ جـ (mod م) فإن م| (ب- جـ) ومن هذا ينتج أن:

م/ (ٲ - ب) + (ب - جـ) = ٲ – جـ ⟵ ٲ ≡ جـ (mod م)

هذا يبرهن بأن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ.

صفوف التكافؤ تسمى صفوف الباقي (مع م). أي صفوف الباقي بالنسبة للمعيار م وذلك لكون كل عددين صحيحين ٲ - ب ينتميان إلى نفس الصف إذا وفقط إذا كانا يتركان الباقي نفسه عند قسمة كل منهما على م وكما موضح أدناه.





ليكن $\quad$ ٲ ≡ ر (mod م)

ب ≡ ر′ (mod م)

سنبرهن بأن ٲ ≡ ب (mod م) وفقط إذا ر′ = ر

بما أن:

ٲ ≡ ر (mod م) ⟵ ٲ= ك م + ر $\qquad$ و م > ر ≥ صفر

وكذلك:

ٲ ≡ ر (mod م) ⟵ ب = ك م′ + ر′ و $\qquad$ م > ر′ ≥ صفر

إذاً $\qquad$ ٲ - ب = (ك – ك′) م + (ر – ر′)

واضح بأن ٲ - ب يقبل القسمة على م إذا وفقط إذا ر – ر′ يقبل القسمة على م بما أن م> ر′ – ر > م-

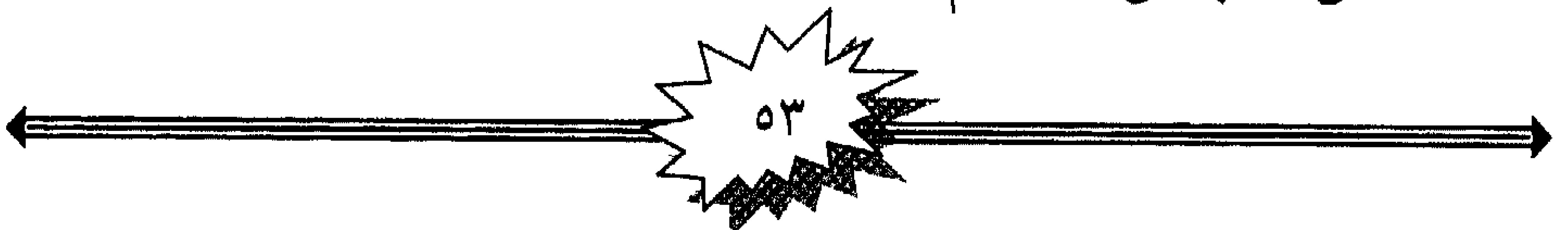
فإن م / (ر – ر′) إذا وفقط إذا كان ر = ر′

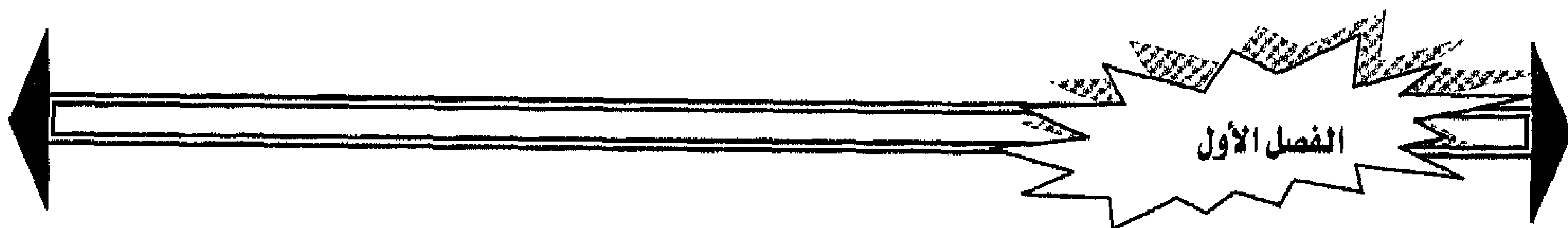
مما تقدم يتضح أن بالإمكان تمثيل كل صف بباقي القسمة أي أن الصف الذي يحوي العدد الصحيح ٲ = ك م + ر يمثل بالباقي ر وهكذا حيث نحصل على منظومة البواقي ٠، ١، ٢،.....(م-١) والتي تمثل الصفوف المختلفة للأعداد الصحيحة لعلاقة التطابق بالنسبة للمعيار م.

(١-٥-١) مبرهنة

إذا كان ٲ ≡ ب (mod م)

ٲ س ≡ ب س (mod م)





لكل الأعداد الصحيحة س

كـذلك: أ ≡ ب (mod م) إذا وفقـط إذا أ ± س ≡ ب ± س (mod م)

لكل الأعداد الصحيحة س

البرهان: واضح أن

أ ≡ ب (mod م) ⟵ م/ (أ - ب) ⟵ م/ س (أ - ب) م / (س أ − س ب)

⟵ س أ ≡ س ب (mod م)

أ ≡ ب (mod م) ↔ م/ (أ − ب) ↔ م/ ((أ ± س) - (ب ± س))

↔ أ ± س ≡ ب ± س (mod م)

(١-٥-٢) مبرهنة:

إذا كان $\text{أ}_1 \equiv \text{أ}_2$ (mod م) وكان أيضاً فإن $\text{ب}_1 \equiv \text{ب}_2$ (mod م) فـإن:

$\text{أ}_1 + \text{ب}_1 \equiv \text{أ}_2 \pm \text{ب}_2$ (mod م) وكذلك

$\text{أ}_1 + \text{ب}_1 \equiv \text{أ}_2 \pm \text{ب}_2$ (mod م)

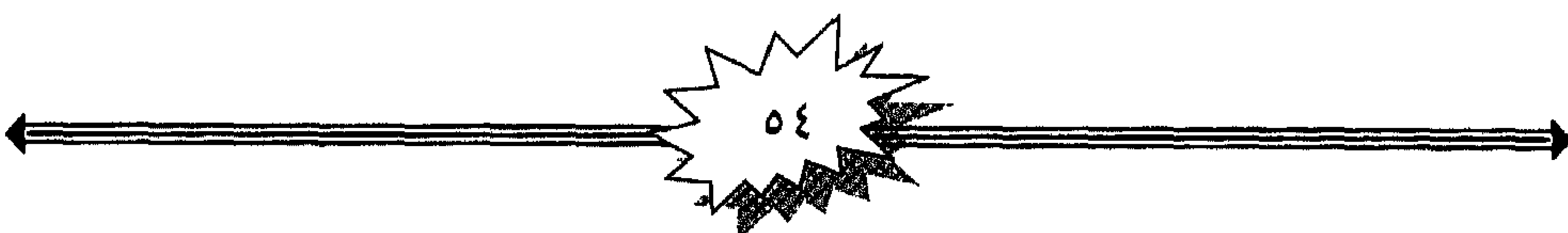
البرهان:

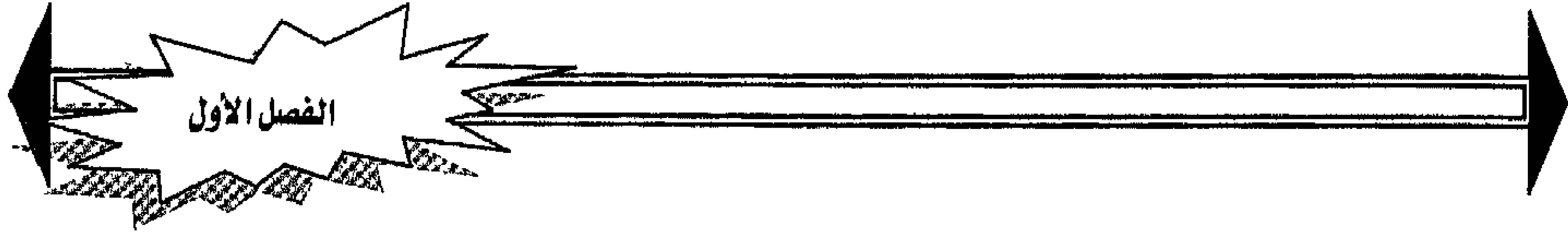
لدينا بالفرض:

م/ $(\text{ب}_1 - \text{ب}_2)$ وكذلك م/ $(\text{أ}_1 - \text{أ}_2)$

إذاً م / $(\text{أ}_1 - \text{أ}_2) + (\text{ب}_1 - \text{ب}_2) = (\text{أ}_1 - \text{ب}_1) - (\text{أ}_2 - \text{ب}_2)$

⟵ $(\text{أ}_1 + \text{ب}_1) \equiv (\text{أ}_2 + \text{ب}_2)$ (mod م)





وكذلك

م| (أ١-أ٢) + (ب١ − ب٢) = (أ١ - ب١) − (أ٢ - ب٢) ⟵ (أ١ - أ٢)
≡ (ب١ - ب٢) (mod م)

بقي أن نبرهن الجزء الثاني، حسب المبرهنة (١-٥-١):

أ١ ≡ أ٢ (mod م) ⟵ أ١ ب١ ≡ أ٢ ب٢ (mod م)

وكذلك ب١ ≡ ب٢ (mod م) ⟵ أ٢ ب١ ≡ أ٢ ب٢ (mod م)

وباستخدام خاصية التعدي ينتج أ١ ب١ ≡ أ٢ ب٢ (mod م)

ضمن هذا البرهان أثبتنا أن علاقة التطابق تشبه المعادلة من حيث إمكانية ضرب الطرفين بالعدد نفسه وللطالب بأن يثبت بأن علاقة التطابق لا تشبه المعادلة من حيث إمكانية قسمة الطرفين على عدد لا يساوي صفراً.

(٣-٥-١) مبرهنة تمهيدية

إذا كان م/ أ ب   و (أ، م) = ١   فإن م/ ب

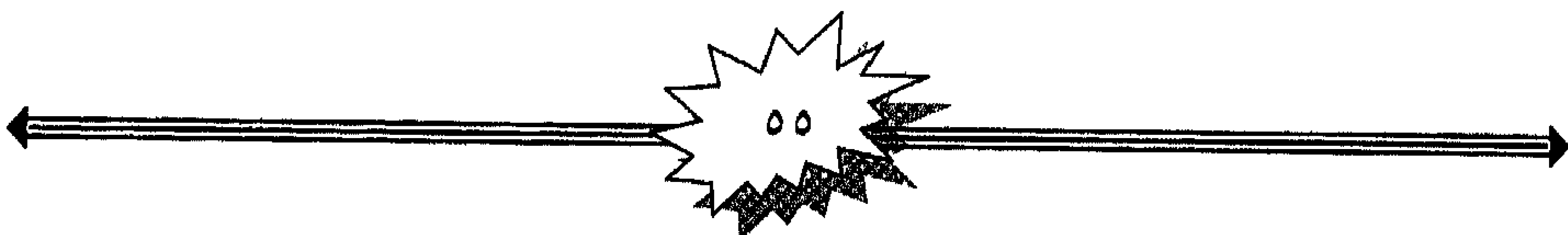
البرهان:

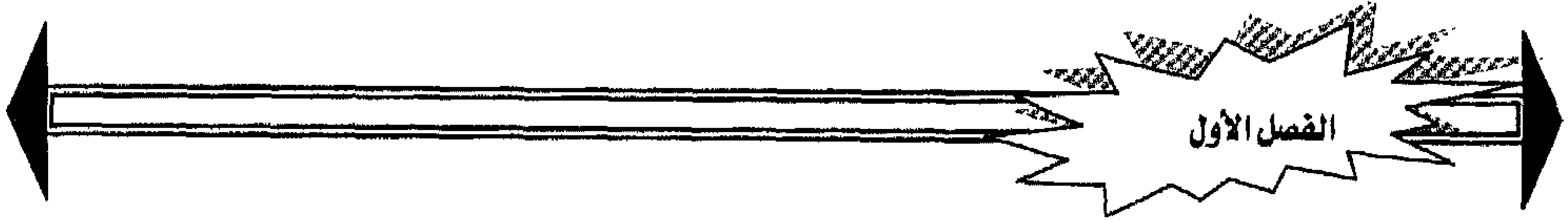
(أ، م) = ١ ⟵ س أ + ص م = ١

⟵ س أ ب + ص م ب = ب

⟵ م/ ب

لأن م يقسم الجانب الأيمن من المعادلة





(٤-٥-١) مبرهنة تمهيدية

إذا كان (ﺃ، م) = ١ و

ﺃس ≡ ﺃص (mod م) فإن

س ≡ ص (mod م).

البرهان:

ﺃس ≡ ﺃص (mod م) م/ (ﺃس - ﺃص) = ﺃ (س- ص) بما أن (ﺃ، م) = ١

إذاً، م/ (س – ص) حسب (٣-٥-١). هذا يعني أن:

س ≡ ص (mod م).

يمكن تعميم المبرهنة السابقة وكما يلي:

(٥-٥-١) مبرهنة: إذا كان جـ ﺃ ≡ جـ ب (mod م)

و (جـ، م) = د حيث أن م = و د فإن:

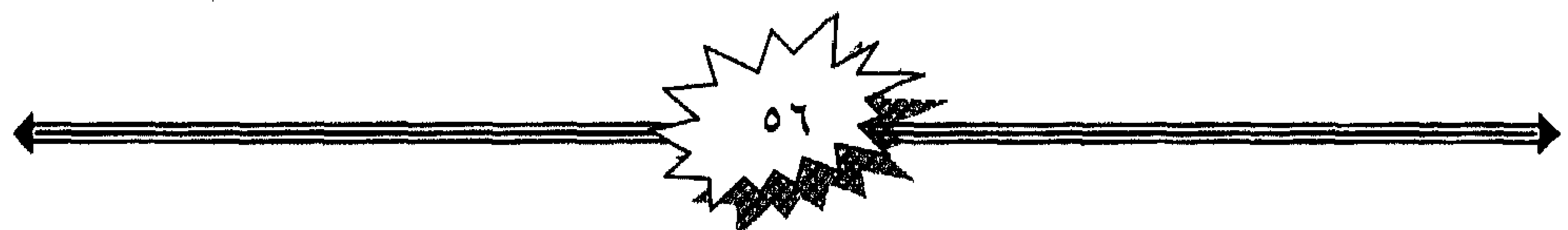
ﺃ ≡ ب (mod و).

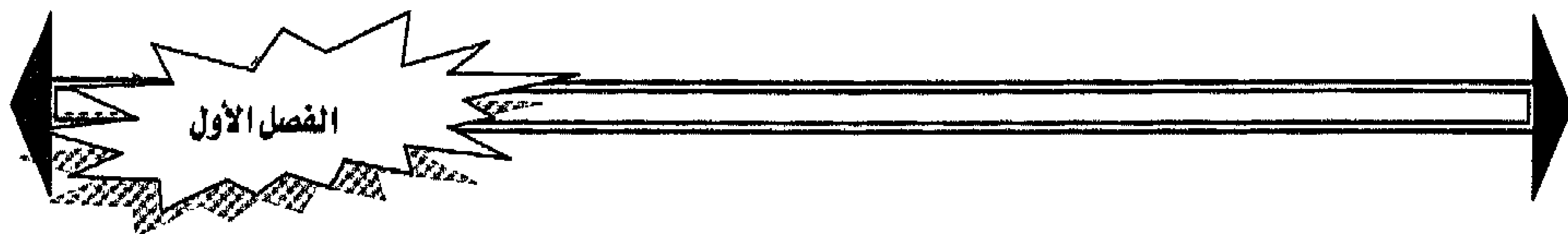
البرهان:

إذا كان د = ١ فالمبرهنة ستكون نفس (٤-٥-١)

نفرض أن د ≠١ بما أن

(جـ، م) = د ⟵ جـ = ق د وإن = و د





إذاً :

د = (جـ، م) = (ﻥ د، ود) = د (ﻥ، و) = (ﻥ، و) = ١

إضافة ذلك جـ ﺃ ≡ جـ ب (mod م) ⟵ م/ جـ (ﺃ - ب)

ود/ جـ (ﺃ - ب) = ﻥ د (ﺃ - ب) ⟵ و/ ﻥ (ﺃ - ب)

⇐ (ق،و)=١ و/ (ﺃ-ب) ⟵ ﺃ ≡ ب (mod و)

(٦-٥-١) مبرهنة

علاقة التطابق ﺃس ≡ ب (mod م) لها حل واحد فقط إذا كان (ﺃ، م) = د/ ب إذا كان د/ ب فإن عدد الحلول المتمايزة بالنسبة للمعيار م هو د

البرهان:

ليكن $س_١$ حلاً للتطابق ﺃس ≡ ب (mod م) إذاً:

م/ (ﺃ $س_١$ - ب) ⟵ ﺃ$س_١$ – ب = ك م ⟵ ب = ﺃ $س_١$ – ك م

ولكن (ﺃ، م) = د يقسم كلاً من م و ﺃ

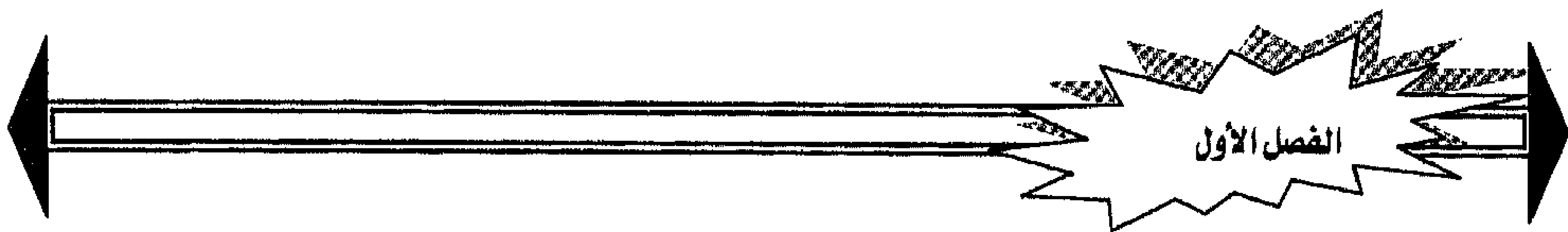
إذاً د/ ب

الآن نفرض أن د/ ب هذا يعني وجود عدد صحيح $ب_١$ بحيث ($ب = ب_١ د$) بما أن د= (ﺃ، م) إذاً توجد أعداد صحيحة $س_١$، $ص_١$ بحيث أن:

د = $س_١$ﺃ +$ص_١$م وبضرب الطرفين المعادلة بـ $ب_١$ لحصل على:

$ب_١س_١$ ﺃ + $ب_١ص_١$م = $ب_١$ د= ب ⟵





م/ (ب١س١) أ – ب (ب١س١) أ ≡ ب (modم)

وهذا يعني أن ب١ س١ حل للتطابق:

أخيراً سنبرهن وجود د من الحلول المتمايزة بالنسبة للمعيار م عندما ب = ب١ د أي عندما د/ ب.

بما أن د =(أ، م) إذاً يوجد عددان صحيحان بحيث أ١، م١ بحيث م =م١ أ

و أ = أ١ د وبالتالي فإن أي حل س* للتطابق

أس ≡ ب (mod م) سيكون حل للتطابق

أ١س ≡ ب١ (mod م) لكون

م / (أ س* - ب) ⟵ م١ د/ (أ١د س* - ب١د)

⟵ م١د/ د(أ١ س* - ب١)

⟵ م١/ (أ١ س* - ب١)

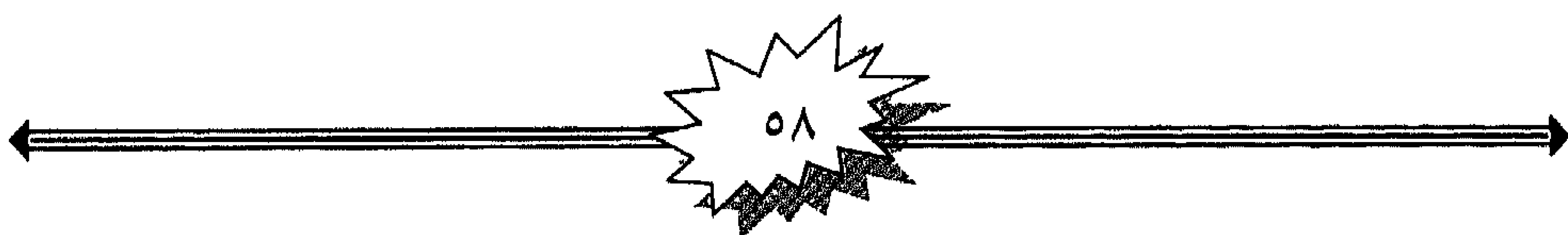
⟵ أ١ س* ≡ ب١ (mod م)

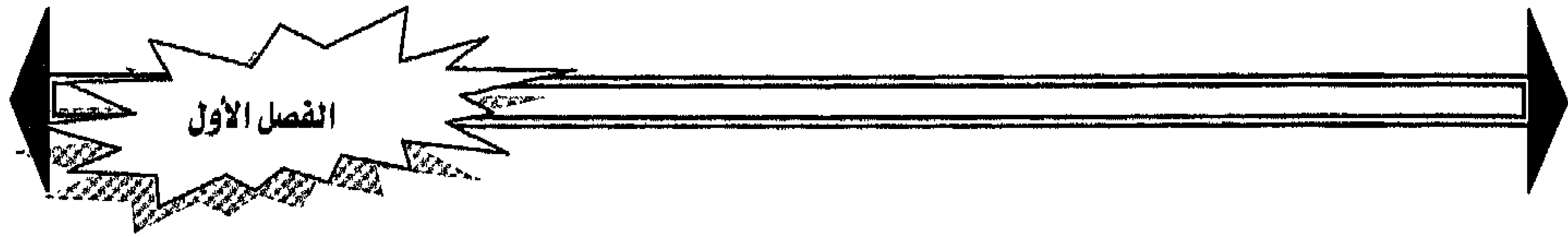
بالإضافة لذلك فإن أي حلين س١، س٢ للتطابق أ١ س ≡ ب١ (mod م) يكونان متطابقين بالنسبة للمعيار م وذلك لكون

أ١ س١ ≡ ب١ ≡ أ١ س٢ (mod م) ⟵

س١ ≡ س٢ (mod م)

الحلول المتمايزة بالنسبة للمعيار م لعلاقة التطابق أ س ≡ ب (mod م) تكون موجودة في المجموعة





هـ = {س$_{١}$ + ك م$_{١}$: ك = ٠، ١، ٢، ...... }.

سنبرهن بأن هذه المجموعة تحتوي على د فقط من الحلول المتمايزة بالنسبة للمعيار م والتي تمثل بـ:

س$_{١}$، س$_{١}$ + م$_{١}$، س$_{١}$ + ٢ م$_{١}$، ....، س$_{١}$ + (د – ١) م$_{١}$

من الواضح أن هذه المجموعة تحتوي على عناصر غير متطابقة إذا لو كان:

س$_{١}$ + ر$_{١}$ م$_{١}$ ≡ س$_{١}$ + ر$_{٢}$ م$_{١}$ (mod م)

ر$_{١}$ < د

ر$_{٢}$ < د فإن هذا ينتج:

ر$_{١}$ م$_{١}$ ≡ ر$_{٢}$ م$_{١}$ (mod م) ← ر$_{١}$ م$_{١}$ ≡ ر$_{٢}$ م$_{١}$ (mod م$_{١}$ د) ← ر$_{١}$ ≡ ر$_{٢}$ (mod د) ←

د/ (ر$_{١}$- ر$_{٢}$) ولكن/ ر$_{١}$- ر$_{٢}$/ < د إذاً:

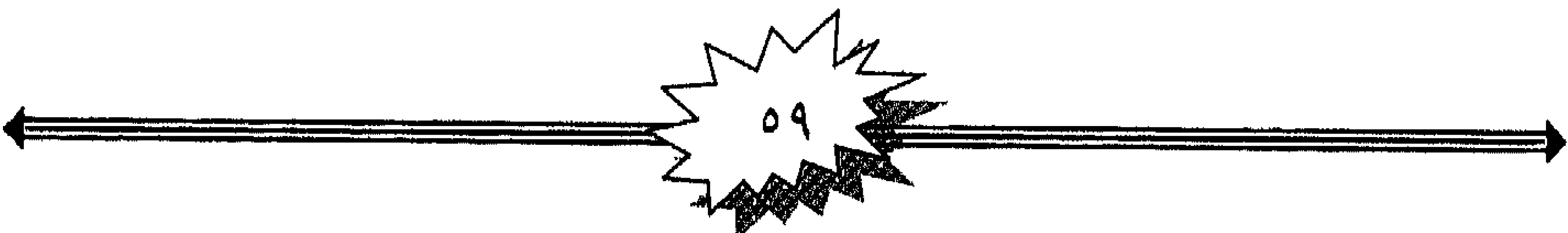
د| (ر$_{١}$ - ر$_{٢}$) ← ر$_{١}$ - ر$_{٢}$ = ٥ ← ر$_{١}$ = ر$_{٢}$.

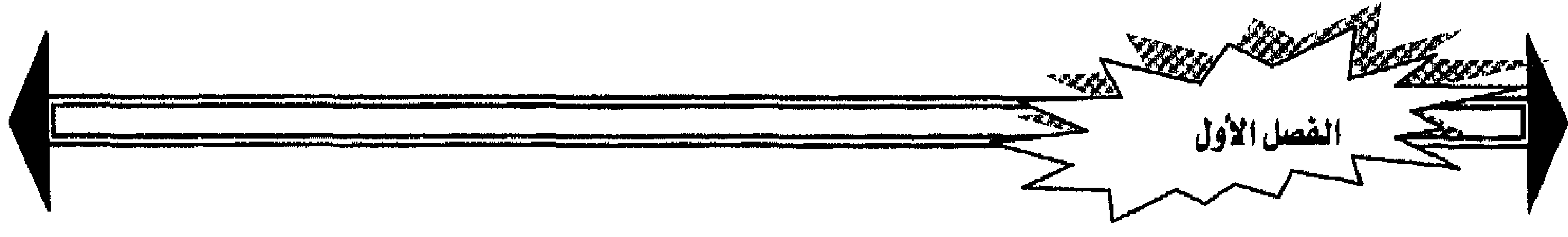
بقي أن نبرهن بأن أي عدد صحيح س$_{١}$ + ك. م$_{١}$ يجب أن يكـون متطابقاً مع أحد عناصر المجموعة هـ

ليكن = ي د + ر، د > ر ≥ صفر

إذاً س$_{١}$+ ك. م$_{١}$ = س$_{١}$ (ي د+ ر) م$_{١}$ / = س$_{١}$ + رم$_{١}$ + ي د م$_{١}$ بمـا أن د م$_{١}$ =م

إذاً س$_{١}$ + ر م$_{١}$ = ي د م$_{١}$ = س$_{١}$ + رم$_{١}$ + ي م ≡ س$_{١}$ + ر$_{١}$م$_{١}$ (mod م)





حيث د ≤ ر

في الحالات الخاصة عندما د = ١ وكذلك عندما د = ب = ١ تكون المبرهنة أعلاه أهمية خاصة ولذلك سندرج هاتين الحالتين في النتيجتين التاليتين:

(١-٥-٧) نتيجة:

المتطابقة أ س ≡ ١ (mod م) لها حل إذا وفقط إذا (أ، م) = ١

ويكون صف الباقي الخاص بالحل وحيداً.

(١-٥-٨) نتيجة:

إذا كان (أ، م) = ١ فإن المتطابقة أ س ≡ ب (mod م) لها حل لأي قيمة معطاة ب ويكون صف الباقي الخاص بالحل وحيداً.

(١-٥-٩) مبرهنة تمهيدية:

إذا كان أ$_{١}$، أ$_{٢}$ ينتميان إلى نفس صف الباقي للمعيار م فإن (أ$_{١}$، م) = (أ$_{٢}$، م).

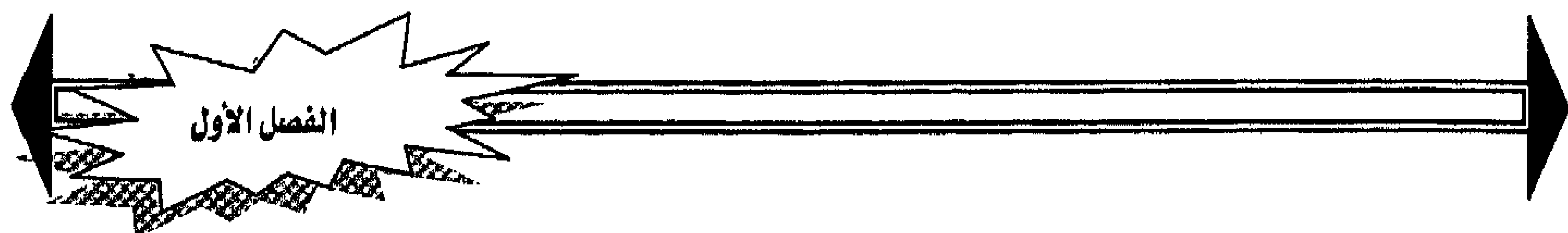
البرهان:

بما أن أ$_{١}$، أ$_{٢}$ ينتميان إلى نفس الصف الباقي بالنسبة للمعيار م فيوجد عدد صحيح ك بحيث أن أ$_{١}$ = أ$_{٢}$ + ك م لكون:

أ$_{١}$ = ك$_{١}$ م + ر ، أ$_{٢}$ = ك$_{٢}$ م + ر ← أ$_{١}$ − ك$_{١}$ م = أ$_{٢}$ − ك$_{٢}$ م ← أ$_{١}$ = أ$_{٢}$ + (ك$_{١}$ − ك$_{٢}$) م ←

أ$_{١}$ = أ$_{٢}$ + ك م





حيث إن $ك = ك_١ - ك_٢$.

هذا يعني بأن أي قاسم مشترك إلى $أ_٢$، م يقسم $أ_١$ أيضاً، وبنفس الطريقة سيكون أي قاسم مشترك إلى $م_١$، م يقسم $أ_٢$ وهذا يعني بأن $(أ_١، م) / (أ_٢، م)$ وكذلك $(أ_٢، م) / (أ_١، م)$ إذاً:

$(أ_١، م) = (أ_٢، م)$.

(١٠-٥-١) مبرهنة الباقي الصينية

لتكن $م_١، م_٢، .....، م_ر$ أعداداً طبيعية بحيث أن $(م_ك، م_ن)$ = الكل $ك \neq ن$

ليكن $م = م_١، م_٢، ......، م_ر$.

التطابقات الآتية:

$س \equiv أ_١ \pmod{م_١}$

$س \equiv أ_٢ \pmod{م_٢}$

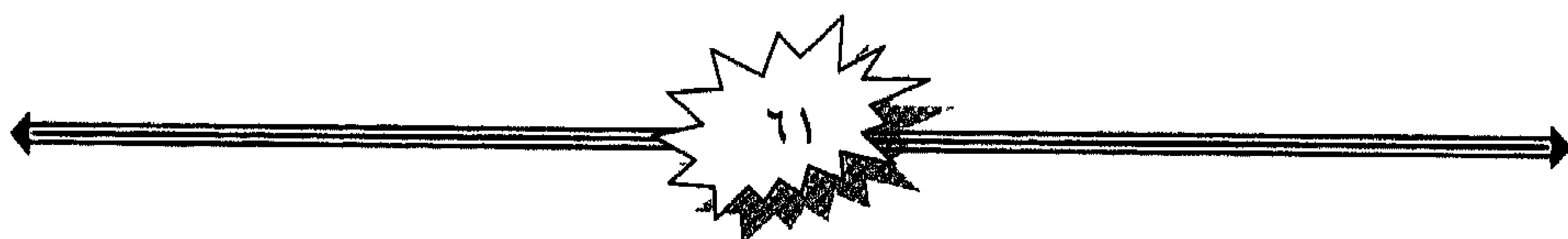
$\vdots$

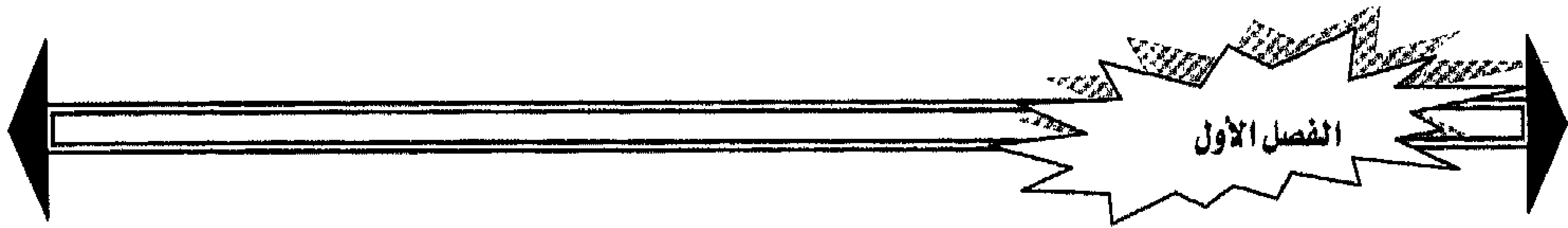
$س \equiv أ_ر \pmod{م_ر}$

لها حل

حيث أن $أ_١، أ_٢، ......، أ_ر$ تمثل أعداد صحيحة معلومة ويتحدد صف الباقي الخاص بالحل بالنسبة للمعيار م بشكل وحيد.

بالإضافة لذلك فإن:





(س ر، م) = ١ إذا وفقط إذا (أ ن، م ن) = ١

حيث أن ن = ١، ٢، ....، ر.

البرهان: ليكن

$\overline{م_ن}$ = م/ م حيث أن ن = ١، ٢، .....، ر بما أن (م ن، م ك) = ١ عندما ن ≠ ك إذا ($\overline{م_١}$، $\overline{م_٢}$،... $\overline{م_ر}$) = ١.

من هذا ينتج بأن هناك أعداد صحيحة ع١، ع٢، ....، ع ر بحيث أن:

ع١ $\overline{م_١}$+ ع٢ $\overline{م_٢}$+ ع٣ $\overline{م_٣}$+ .... + ع ر $\overline{م_ر}$ = ١

للسهولة نكتب هـ ن = ع ن $\overline{م_ن}$

هذا يعني أن هـ١ + هـ٢ + ... + هـ ر = ١

وبالتالي فإن هـ ك ≡ صفر (mod م ن) حيث ك ≠ ن

وكذلك هـ ن = ١ (mod م ن) حيث

ن = ١، ٢، ٣، ....، ر

من هذا ينتج بأن كل عدد صحيح س يحقق المعادلة:

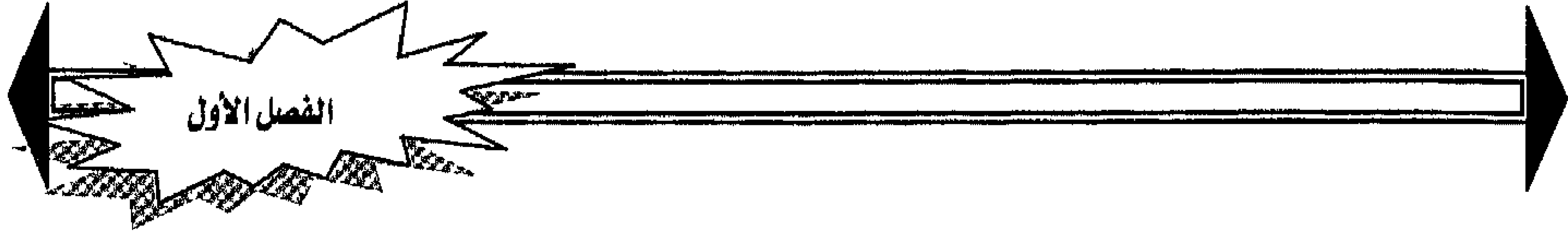
س ≡ أ١ هـ١ + أ٢ هـ٢ + ... + أ ر هـ ر (mod م)

يكون حلاً للتطابقات الآتية فإذا وضعنا (mod م ن) بدلاً من (mod م) في العلاقة أعلاه سنحصل على س ≡ أ ن (mod م ن)

إذا كان س* حلاً آخر للتطابقات الآتية فإن هذا ينتج:

س* ≡ س (mod م ن) حيث ن = ١، ٢، .....، ر





وهذا يعني $س^*$ - س بأن يقبل القسمة على $م_ن$ من لكل قيم ن=١، ٢، ......، ر وبالتالي فإن $س^*$ - س يقبل القسمة على م أي أن صف الباقي – الخاص بالحل = بالنسبة للمعيار م يحدد بشكل وحيد وأخيراً فإن:

($س_ر$ م) = ١ تتحقق إذاً وفقط إذا ($س_ر$ $م_ن$) = ١ حيث ن= ١، ٢، ......، ر

بما أن س ≡ $أ_ن$ (mod $م_ن$) حيث أن ن= ١، ٢، ......، ر

إذاً باستخدام (٩-٥-١) ينتج:

($س_ر$ $م_ن$) = ($أ_ن$، $م_ن$)

مثال ٦: بسط علاقة التطابق

س + ٥٠ ≡ ٣٩(v mod)

الحل: بما أن كل عدد صحيح متطابق مع باقي القسمة إذاً

س + ٥٠ = ٣٩ (٧ mod) ↔

س + ١ + ٧ (٧) (٤ + ٥ (٧)) (٧ mod) ↔

س + ١ ≡ ٤ (٧ mod) ↔

س ≡ ٣ (٧ mod)

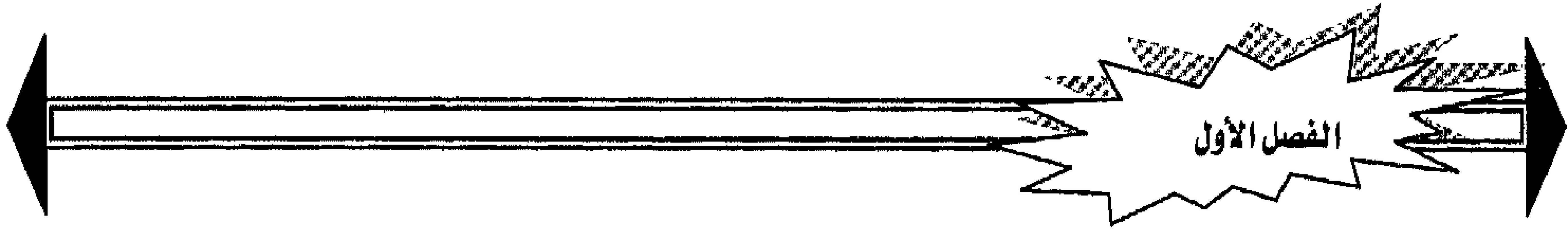
مثال: بسط علاقة التطابق

٢٣٥ س = ٥٤ (٧ mod)

الحل:

٢٣٥ س ≡ ٥٤ (٧ mod) ↔





٤ س + ٣٣ (٧) س ≡ (٥+٧ (٧)) (mod ٧) ↔

٤ س ≡ ٥ (mod ٧) ↔

٤ س ≡ (-٢) (mod ٧) $\xleftrightarrow{(٢،٧)=١}$

٢ س ≡ (-١) (mod ٧) ↔

٢ س ≡ ٦ (mod ٧) ↔

س ≡ ٣ (mod ٧)

مثال(٨): بسط علاقة التطابق

٢٩ س ≡ ٥ (mod ٣٤)

الحل: ٢٩ س ≡ ٥ (mod ٣٤) ↔

٢٩ س ≡ (-٢٩) (mod ٣٤)

$\xleftrightarrow{(٢٩،٣٤)=١}$ س ≡ (-١) (mod ٣٤) ↔

س ≡ ٣٣ (mod ٣٤)

مثال(٩): برهن علاقة التطابق ٣٥ س ≡ ٥ (mod ١٤)

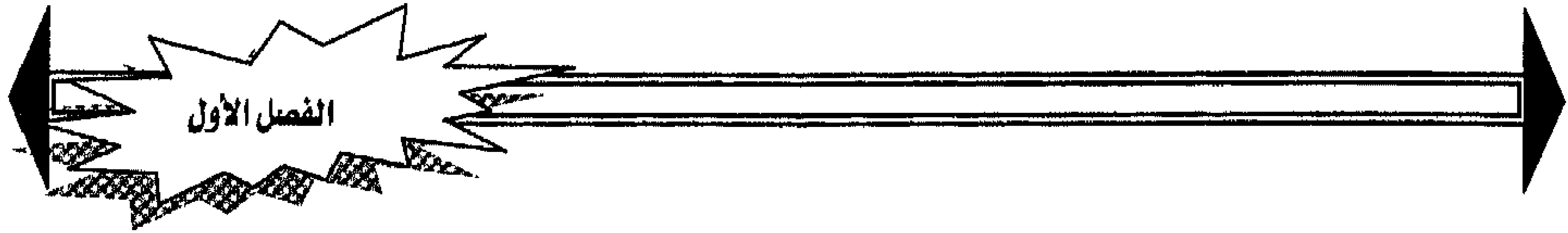
الحل: بما أن (٣٥،١٤) = ٧ وإن ٧ × ٥ إذاً لا يوجد حل للمتطابقة أعلاه

مثال(١٠): جد الحلول المتمايزة بالنسبة للمعيار ٢١ للتطابق

٣٥ س ≡ ١ (mod ٢١).

الحل: بما أن (٣٥، ٢١) = ٧ / ١٤





إذاً هنا سبعة حلول متمايزة، بما أن:

٣٥ س ≡ ١٤ (mod ٢١) ⟷

٧ (٥) س = ٢ (٧) (mod (٣) (٧) ⟷

٥ س = ٢ (mod ٣) ⟷

س = ١ (mod ٣)

إذاً الحول المتمايزة هي

١, ١ + ٣, ١ + (٢) (٣)، ١ + ٣ (٣)، ١ + ٤ (٣)، ١+ ٥ (٣)،١

+ ٥ (٣)، ١ + ٦ (٣)، ١.

مثال١١: جد حلول التطابق

١١ س ≡ ٢ (mod ٣١٧)

الحل: بما أن (١١، ٣١٧) = ١|٢ إذاً هناك حل واحد للتطابق

بما أن _(١١، ٣١٧) = ١ فإن هناك عددين صحيحين م، ب بحيث أن:

١١م + ٣١٧ ب = ١ وبالتالي فإن ١١ (٢ م) + ٣١٧ (٢ ب) = ٢

هذا يعني أن:

١١ (٢ م) ≡ ٢ (mod ٣١٧) أي أن ٢م حل للتطابق، نجد قيمة م حسب خوارزمية القسمة.

(١١-٥-١) تمثيل الأعداد الصحيحة باستخدام صفات التطابق:

من أهم التطبيقات لصفات التطابق بالنسبة للأعداد الصحيحة هي تمثيلها



بطرق مختلفة نحن نعرف بأننا في نظام الترقيم العربي نمثل أي عدد صحيح باستخدام بعض أو كل الرموز العشرة أو ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ حيث يشكل العدد عشرة أساساً لهذا النظام، من جهة أخرى فإن الرموز العشرة أعلاه تمثل بواقي القسمة على ١٠ وهذا يتضح مما يلي:

ليكن أ عدداً صحيحاً موجباً. باستخدام خوارزمية القسمة نجد

أ = ل$_{٠}$. ١٠ + ر$_{٠}$

١٠ > ر$_{٠}$ ≥ صفر

من الواضح أنه في حالة ك$_{٠}$ = صفر فإن ر$_{٠}$ = أ.

إذا كان ك$_{٠}$ > ٠ فإننا باستخدام خوارزمية القسمة أيضاً لحصل على:

ك$_{٠}$ = ١٠ ك$_{١}$ + ر$_{١}$

٠ ≥ ر$_{١}$ > ١٠

إذا كان ك$_{١}$ = صفر فإن ك$_{٠}$ = ر$_{١}$ وبالتالي فإن أ = ١٠ر$_{١}$ + ر$_{٠}$

أما إذا كان ك$_{١}$ = صفر فإن ك$_{٠}$ = ر$_{١}$ وبالتالي فإن:

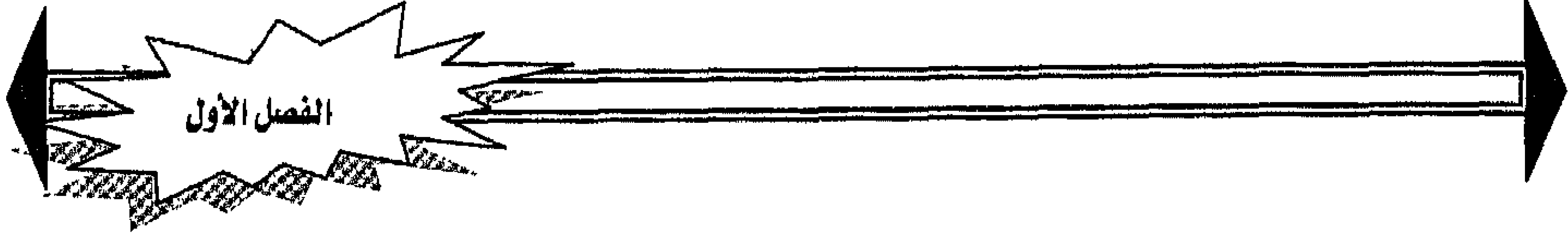
أ = ١٠ ر$_{١}$ + ر$_{٠}$

أما إذا كان ك$_{١}$ > ٠ فإن:

ك$_{١}$ = ١٠ ك$_{٢}$ + ر$_{٢}$، ٠ ≤ ر$_{٢}$ > ١٠.

وبنفس الطريقة إذا كان ك$_{٢}$ = صفر فإن ك$_{١}$ = ر$_{٢}$ وهذا يعني أن:

ك$_{١}$ = ١٠ ر$_{٢}$ = ر$_{١}$ وبالتالي فإن:



$$\text{أ} = ١٠\,\text{ك}_{٠} + \text{ر}_{٠} = \text{ر}_{٢}\,١٠^{٢} + \text{ر}_{١}\,١٠ + \text{ر}_{٠}$$

نستمر بنفس الأسلوب حتى نصل إلى $\text{ك}_{١}$ = صفر لكون قيم ك١ تنازلية وهذا يعني بأننا يمكن أن نمثل أ على شكل:

$$\text{أ} = ١٠^{\text{ن}}\,\text{ر}_{\text{ن}} + ١٠^{\text{ن}-١}\,\text{ر}_{\text{ن}-١} + \ldots + ١٠\,\text{ر}_{١} + \text{ر}_{٠}$$

أي أن العدد الصحيح أ يمثل في نظام الترقيم العربي، الذي أساسه العدد ١٠ بالرمز:

$$\text{ر}_{\text{ن}} = \text{ر}_{\text{ن}-١}،\ \ldots،\ \text{ر}_{١}،\ \text{ر}_{٠}$$

وهذا التمثيل وحيد حيث أن كلاً من باقي القسمة وناتجها وحيد في كل مرحلة من مراحل القسمة.

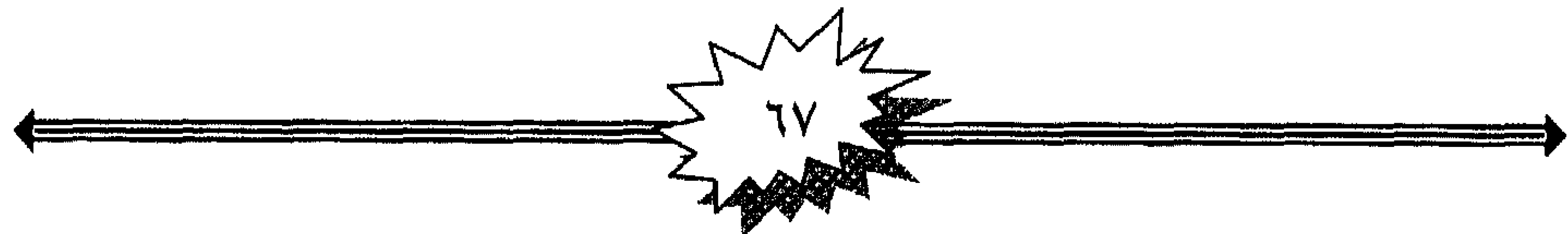
مثال (١٢): العدد الصحيح ١٢٥ يمثل في نظام الترقيم العربي الذي أساسه العدد عشرة بالشكل:

$$١٢٥ = ٥ + ٢ \times ١٠ + ١ \times ١٠^{٢}$$

كذلك $٣٥ = ٥ + ٣ \times ١٠$

من الواضح، أن الطريقة التي استخدمناها أعلاه في تمثيل العدد الصحيح أ لا تعتمد على كون الأساس ١٠ ويمكن اعتماد أي عدد طبيعي بدلاً من ١٠ فلما أخذنا الأساس ٣ بدلاً من ١٠ مثلاً فإن العدد الصحيح يمثل بالرموز ٠، ١، ٢ وبالتالي فإن الأعداد:

$١٥ = ١\,(٣)^{٢} + ٢\,(٣) + ٠$ يمثل بالرمز ١٢٠ للأساس ٣



٢٠ = ٢ (٣)^{٢} + ٠ (٣) + ٢ يمثل بالرمز ٢٠٢ للأساس ٣

أما الحقائق الأساسية للجمع وللضرب للأساس ٣ فإنها تكون معرفة كما يلي:

*	٠	١	٢
٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٢
٢	٠	٢	١١

+	٠	١	٢
٠	٠	١	٢
١	١	٢	١٠
٢	٢	١٠	١١

مثال(١٣): باستخدام الأساس ٣ جد مجموع العددين الصحيحين ١٢٠، ١٢١ وحاصل ضربهما

الحل:

الجمع

١٢٠ = ١ (٣)^{٢} + ٢ (٣) + ٠

١٢١ = ١ (٣)^{٢} + ٢ (٣) + ١

١٠١١ = ٢ (٣)^{٢} + ٤ (٣) + ١

= ٢ (٣)^{٢} + (٣+١)^{٣} + ١

= ٣ (٣)^{٢} + ١ (٣) + ١

الضرب

١٢٠ | ١ (٣)^{٢} + ٢ (٣) + ٠

١٢١ | ١ (٣)^{٢} + ٢ (٣) + ١

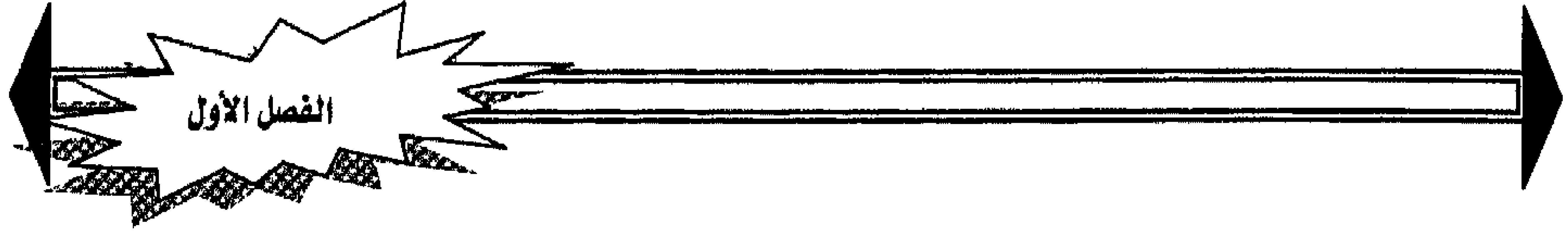
---

١٢٠ | ١ (٣)^{٢} + ٢ (٣) + ٠ = ١ (٣)٢ + ٢ (٣) + ٠

١٠١٠ | ٢ (٣)^{٢} + ٤ (٣)^{٢} + ٠ (٣) =١ (٣)^{٤} + ٠ (٣)^{٣} + ١ (٣)^{٢} + ٠ (٣)

١٢٠ | ١ (٣)^{٤} + ٢ (٣) + ٠ (٣) =١ (٣)^{٤} + ٢ (٣)^{٣} + ٠ (٣)^{٢}

٢٢٢٢٠ = ٢ (٣)^{٤} + ٢ (٣)^{٣} + ٢ (٣)^{٢} + ٢ (٣)



تمارين (٥-١)أ

١- عين جدول الجمع وجدول الضرب للأعـداد باسـتخدام الأسـس ٤، ٥، ٦، ٧ على التوالي.

٢- الأعداد التالية ممثلة باستخدام الأساس ١٠ مثلها باسـتخدام الأسـاس ٥، ١٢٠، ٧٠، ٥٢١، ٥٥٩٢، ٢٢٧٨٥.

(١٢-٥-١) أمثلة متنوعة:

مثال(١٤): إذا كان (أ، ب) = ١ فإن (جـ^ن، ب) = ١ أيضاً لأي عدد طبيعي ن

الحل: بما أن:

(جـ^ن، ب) = د ⟵ (د/ ب) و (د/ جـ^ن)

إذا كان د > ١ فإن إما أن يكون عدداً أولياً وفي هذه الحالة

د/ جـ^ن ⟵ د/ جـ

إذاً د/ (جـ، ب) = ١ وهذا تناقض

أو أنه عدد غير أولي فيوجد عدد أولي ل بحيث ل/ د ولكن

د/ ب، د/ جـ^ن

⟵ ل/ ب و (ل/ جـ^ن ⟵ ل/ جـ)

⟵ ل/ (ب، جـ) = ١ وهذا تناقض أيضاً



مثال١٥: إذا كان (أ، ب) = ١ وكان أ/جـ و ب/جـ فإن أ ب/جـ أيضاً

الحل: بما أنه يوجد عددان صحيحان م،ن بحيث أن:

جـL أ ⟵ جـ = ن أ
ب/جـ ⟵ جـ = م ب
⟵ ن أ = م ب

وبما أنه يوجد عددان صحيحان س، ص بحيث أن

١ = (أ، ب) ⟵ أ س + ب ص = ١ ⟵

س ن أ − ص ن ب = ن

إذاً:

س م ب + ص ن ب = ن ⟵ ب (س م + ص ن) = ن

⟵ أ ب (س م + ص ن) = ن أ = جـ ⟵ أ ب/جـ

مثال(١٦): عندما يكون ن عدداً طبيعياً فردياً برهن أن ٥ | ($٢^{٢ن}$ + ١)

الحل: ليكن ن = ٢م + ١

إذاً $٢^{٢ن}$ + ١ = $٢^{٢(٢م+١)}$ +١ = $٢^{٤م+٢}$ + ١ = $٢^{٢}$ $٢^{٤م}$ + ١.

نستخدم الآن طريقة الاستقراء الرياضي:

عندما م = ١ فإن ٥ | [($٢^{٢}$، $٢^{٤}$) + ١]= ٦٥

نفرض أن ٥ | [($٢^{٢}$، $٢^{٤ك}$) + ١]

$٢^{٢}$. $٢^{٤(ك+١)}$ + ١ = $٢^{٢}$. $٢^{٤ك}$ + ١.

= ١٦ .$٢^{٢}$، $٢^{٤ك}$ + ١ + ١٥ − ١٥ = ١٦ ($٢^{٢}$، $٢^{٤ك}$+١) − ١٥

وحسب فرضية الاستقراء فإن الجانب الأيسر يقبل القسمة على ٥.

مثال(١٧): برهن أن $٥ | (٢^{٢ن} - ١)$ عندما يكون ن عدداً طبيعياً زوجياً

الحل: ليكن ن = ٢ م إذاً $م^{٢ن} - ١ = ٢^{٤م} - ١$ إذاً ن = ٢ م

نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي:

عندما م = ١ فإن العلاقة صحيحة لكون $٥ | (٢^{٤} - ١) = ١٥$

نفرض أن $٥ | (٢^{٤ل} - ١)$ بما أن:

$$٢^{٤(ك+١)} - ١ = (٢^{٤ك} ، ٢^{٤}) - ١ = (١٦ ، ٢^{٤ك}) - ١$$

$$= ١٦ (٢^{٤ك}) - ١ - ١٥ + ١٥$$

$$= ١٦ \ ٢^{٤ك} - ١ + ١٥$$

إذاً الجانب الأيسر يقبل القسمة على العدد ٥ وباستخدام فرضية الاستقراء الرياضي.

مثال ١٨:

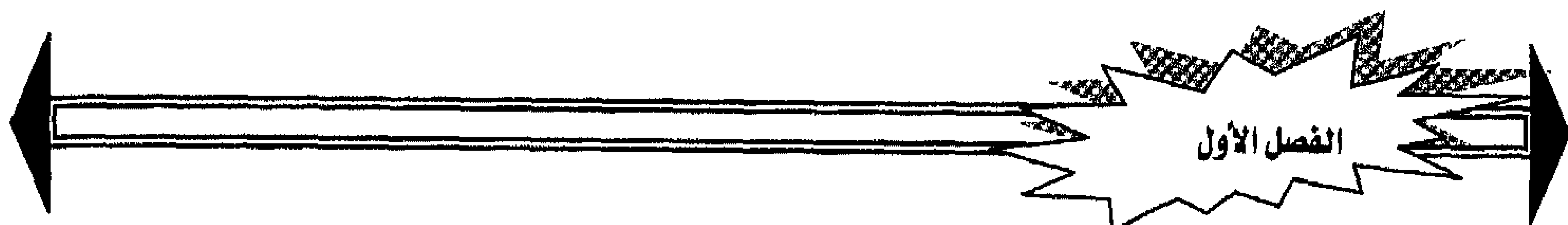
جد أصغر عدد طبيعي $ٯ$، يطابق كلاً من الأعداد ٢٢ و ٣١٢ و ٣١٢ × ٢٢ بالنسبة إلى العدد ٧.

الحل:

بما أن $ٯ$ أصغر عدد طبيعي يحقق العلاقة:

$$ٯ \equiv ٢٢ \ (\bmod ٧) \longleftrightarrow ٯ \equiv ١ \ (\bmod ٧) \longleftrightarrow ٯ = ١$$

$$ٯ \equiv ٣١٢ \ (\bmod ٧) \longleftrightarrow ٯ \equiv ٤ \ (\bmod ٧) \longleftrightarrow ٯ = ٤$$



$$أ \equiv ٢٢(٣١٢) \pmod{٧} \longleftrightarrow أ \equiv (١\times٤) \pmod{٧} \longleftrightarrow أ = ٤$$

مثال (١٩):

جد أصغر عدد طبيعي، أ يطابق كلاً من الأعداد $٣^{٤}$، $٣^{٢}$ بالنسبة إلى العدد ١١.

الحل: بما أن المطلوب هو أصغر عدد طبيعي إذاً:

$$أ \equiv ٣^{٢} \pmod{١١} \longleftrightarrow أ \equiv ٩ \pmod{١١} \longleftrightarrow أ = ٩$$

$$أ \equiv ٣^{٤} \pmod{١١} \longleftrightarrow أ \equiv ٤ \pmod{١١} \longleftrightarrow أ = ٤$$

مثال(٢٠):

جد أصغر عدد طبيعي، أ يطابق $٣^{٥١٥}$ بالنسبة للعدد ٧

الحل:

$$٣^{١٠} = ٤ \pmod{٧} \longleftrightarrow ٣^{٢} = ٤(٤) \pmod{٧} \longleftrightarrow ٣^{٢٠} \equiv ٢ \pmod{٧}$$

$$\longleftrightarrow ٣^{٤٠} = ٤ \pmod{٧} \longleftrightarrow ٣^{١٠٠} = (٢\cdot٤\cdot٤) \pmod{٧} \longleftrightarrow$$

$$٣^{١٠٠} \equiv ٤ \pmod{٧} \longleftrightarrow ٣^{٥٠٠} = (٤\cdot٤\cdot٤\cdot٤\cdot٤) \pmod{٧}$$

$$\longleftrightarrow ٣^{(٥٠٠)} = ٢ \pmod{٧} \longleftrightarrow$$

$$٣^{٥١٥} = (٣\cdot٤\cdot٤\cdot٢) \pmod{٧} \longleftrightarrow$$

$$٣^{٥١٥} \equiv ٥ \pmod{٧}$$

مثال(٢١): إذا كان م عدداً صحيحاً فإن $م^{٢} = (٠ \text{ أو } ١) \pmod{٤}$

الحل: إذا كان م عدداً فردياً فإن م = ٢ن + ١ كما أن:



م^{٢} = ٤ ن^{٢} + ٤ ن + ١ = ٤ (ن^{٢} + ن) + ١ ≡ ١ (mod ٤)

أما إذا كان م عدداً زوجياً فإن م = ٢ن وفي هذه الحالة

م^{٢} = ٤ ن^{٢} ≡ ٠ (mod ٤)

مثال ٢٢: جد الحلول المتمايزة لكل من علاقات التطابق التالية

أ) (س − ٣) ≡ ٢ (mod ٥)

ب) (٢س + ١) ≡ ٤ (mod ١٠)

جـ) ٤٥ س ≡ ٢٤ (mod ٣٤٨)

(س − ٣) ≡ ٢ (mod ٥) ⟷ س ≡ ٥ (mod ٥) ⟷ س ≡ ٠ (mod ٥)

بما أن (١، ٥) = ١ | ٠

فإن س = صفر

ب) بنفس الطريقة

٢ س + ١ ≡ ٤ (mod ١٠) ⟷ ٢ س ≡ ٣ (mod ١٠)

بما أن (٢، ١٠) = ٢ × ٣

إذن، فلا يوجد حل للتطابق

جـ) بما أن ٣|٢٤ = (٣٤٨، ٤٥) إذاً توجد ثلاثة حلول متمايزة بالنسبة إلى

٤٥ س ≡ ٢٤ (mod ٣٤٨) ⟷

١٥٠٣س ≡ ٨٠٣ (mod ٣ (١١٦)) ⟷

١٥ س ≡ ٨ (mod ١١٦) ⟷

١٥ س ≡ (-١٠٨) (mod ١١٦) ⟷

٥ س ≡ - (-٣٦) (mod ١١٦) ⟷

٥ س ≡ ٨٠ (mod ١١٦) ⟷ س ≡ ١٦ (mod ١١٦)

إذن تكون الحلول المتمايزة بالنسبة إلى ٣٤٨ هي

١٦، ١٦ + ١١٦، ١٦ + ٢ (١١٦)

مثال (٢٣): جد الأعداد الصحيحة س، ص بحيث أن:

٣١٣ س + ٤٥ ص = ١٧

الحل: ٣١٣ س – ١٧ = ٤٥ ص ⟵ ٣١٣ س ≡ (**mod ٤٥**)

⟵ ٤٣ س ≡ ١٧ (mod ٤٥) ⟵ (-٢) س ≡ (-٢٨) (mod ٤٥)

⟵ س ≡ ١٤ (mod ٤٥)

⟵ س = ١٤

كما أن ص = $\frac{-(٣١٣ \times ١٤) - ١٧}{٤٥}$ = -٩٧

مثال (٢٤): يكون العدد م زوجياً إذا وفقط إذا كانت $م^{٢}$ عدداً زوجياً هذه العبارة مكافئة للعبارة

يكون العدد م فردياً إذا وفقط إذا كانت $م^{٢}$ عدداً فردياً

الحل: إذا كانت م عدداً زوجياً، فيوجد عدد صحيح ن بحيث أن:

م = ٢ن ⟵ $م^{٢}$ = ٤ $ن^{٢}$

وهذا يعني بأن أ^{٢} عدد زوجي

إذا كان أ عدداً فردياً، فيوجد عدد صحيح م بحيث:

م = ٢م + ١ ← أ^{٢} = ٤م^{٢} + ٤ن + ١

= ٤ (م^{٢} + ن) + ١

وهذا يعني بأن أ^{٢} عدد فردي وبالتالي فإن البرهان انتهى لكون العبارة

ل ← ك مكافئة للعبارة ك ن ← ن ل

مثال (٢٥): برهن أن المعادلة أ^{٢} و ٢ب^{٢} لا حل لها في مجموعة الأعداد الصحيحة: إذا كان (أ، ب) = ١

الحل: بما أن أ^{٢} = ٢ب^{٢} فإن

أ^{٢} عدد زوجي وكذلك أ عدد زوجي

هذا يعني أنه يوجد عدد صحيح مثل جـ بحيث أ = ٢ جـ

إذن أ^{٢} = ٤ جـ^{٢} = ٢ ب^{٢} ← ب^{٢} = ٢ جـ^{٢}

وهذا يعني أن ب^{٢} عدد زوجي وبالتالي فإن ب عدد زوجي أيضاً وهذا مناقض للافتراض بكون (أ، ب) = ١ أي لا يجوز أن يكون كل أ، ب عدداً زوجياً لأن هذا ينتج (أ، ب) = ٢ على الأقل وهذا مناقض للفرض.

تمارين (٥-١) ب

١- برهن أن حاصل ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متتالية يقبل القسمة على ٦ كما أن حاصل ضرب أعداد صحيحة متتالية يقبل القسمة على ٢٤.

٢- برهن أن ٦ / (ن^{٣} – ن) وكذلك ٣٠/ (ن^{٥} – ن) لأي عدد طبيعي ن.

٣- جد ١,٧٢٥، ٢,٣٨٤

٤- مثل (٣٥،٢١،١٥) بالشكل ١٥س + ٢١ص +٣٥ع حيث أن س، ص، ع أعداد صحيحة.

٥- ليكن $\text{أ}_{١}$ = ٢ و $\text{أ}_{ن+١}$ = $\text{أ}^{٢}$ - $\text{أ}_{ن}$ +١ حيث أن ن = ١، ٢، ....

أ- برهن أن ١ = ($\text{أ}_{ن}$، $\text{أ}_{ك}$) عندما ك ≠ ن

ب- برهن باستخدام (أ) أنه يوجد مالا نهاية من الأعداد الأولية.

جـ- برهن أن ١٩ × $\text{أ}_{ن}$ لأي عدد طبيعي ن

٦- إذا كان (ب، جـ) = ١ فبرهن أن

(أ، ب جـ) = (أ، ب) (أ، جـ)

٧- برهن أن

($٢^{٢^{م}}$ + ١(٢)$^{٢^{م}}$ + ١) = ١ عندما م ≠ ن

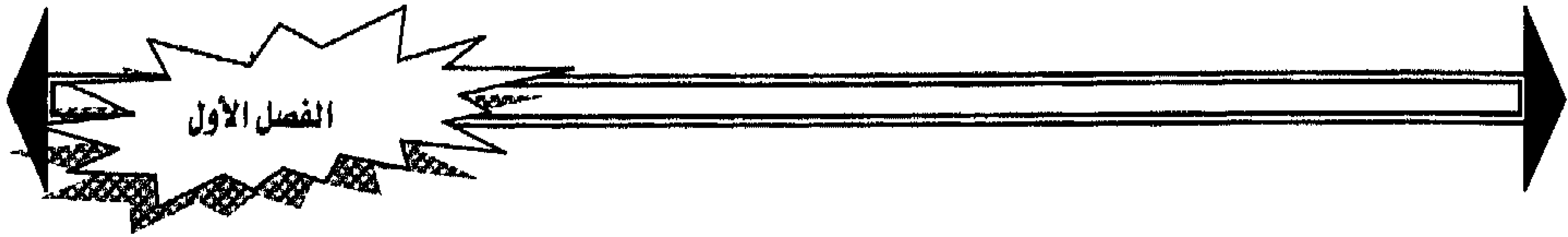
٨- ليكن [أ، ب] المضاعف المشترك الأصغر للأعداد الصحيحة أ، ب برهن أن

أ - (أ، ب) [أ، ب] = أ. ب

ب- (أ. [أ، ب]) = [(أ، ب) . (أ، جـ)].

٩- إذا كان العدد ٢^{ن} – ١ أولياً فإن (ن) عدد أولي.

١٠- برهن أنه لا يوجد عدد طبيعي ن بحيث أن ٣ ن^{٢}- ١ = م^{٢}.



١١- برهن أن هناك مالا نهاية من الأعداد الأولية ل بحيث ل^{٣} ≡ (٤ mod)

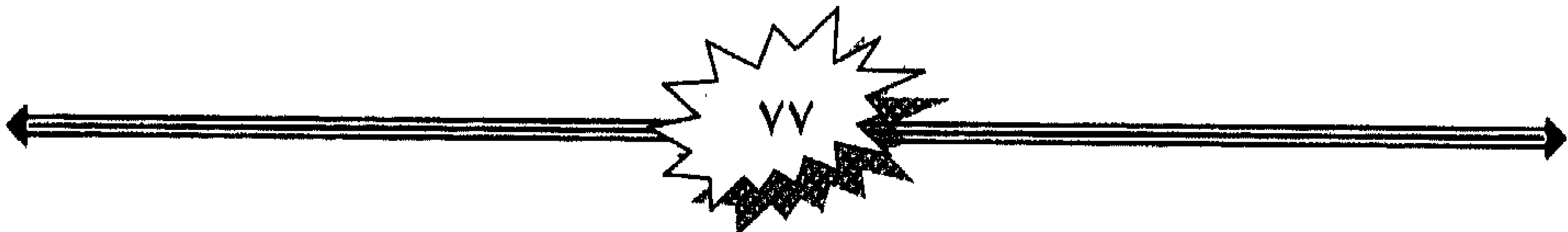
١٢- لتكن ﺃ، ب، ﺟ أعداداً طبيعية معلومة ليكن(ﺃ، ب) = ١ برهن أن هناك عدداً طبيعياً س بحيث أن (ﺃ س + ب، ﺟ) = ١.

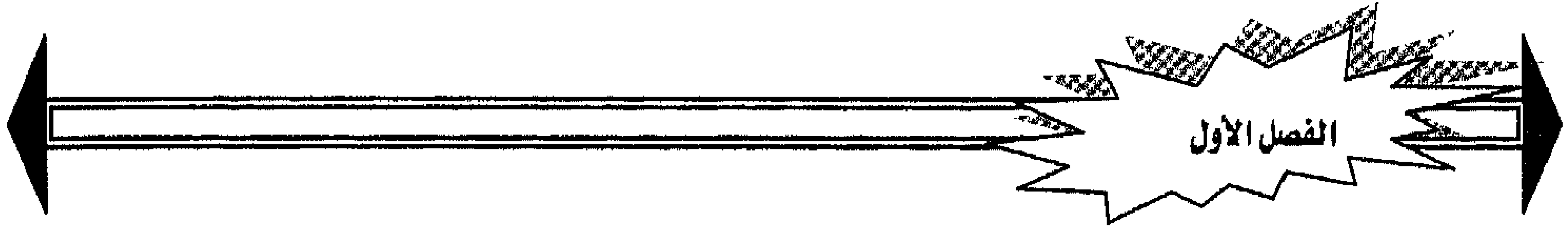
(٦-١) الأعداد النسبية:

نعرف من دراستنا السابقة أن منظومة الأعداد الطبيعية ليست مغلقة بالنسبة لعملية الطرح وليس فيها حل المعادلة من النمط س + ﺃ = ب عندما تكون ب > ﺃ وهذا ما دعى إلى إنشاء منظومة الأعداد الصحيحة التي يمكن اعتبارها توسيعاً لمنظومة الأعداد الطبيعية وهي – كما تعلم – مغلقة بالنسبة لعملية الطرح. أي أنها تحتوي على النظير الجمعي لكل عنصر من عناصرها ولكنها – مع ذلك لا تلبي حاجتنا لحل المعادلات من النمط ﺃ س = ب، ﺃ ≠ صفر، ب غير قابل للقسمة على ﺃ، أي أن منظومة الأعداد الصحيحة لا تحتوي النظير الضربي لكل عناصرها، فهي إذا غير مغلقة بالنسبة لعملية القسمة.

إن هدفنا في هذا البند سيكون بناء منظومة أعداد (جديدة) تحتوي الأعداد الصحيحة وتحتوي أيضاً النظير الضربي لكل عنصر من عناصرها باستثناء الصفر أي أنها مغلقة بالنسبة لعملية القسمة إذا استثنينا القسمة على الصفر.

سوف نسلك طريقاً مشابهاً للطريق الذي سلكناه في بناء الأعداد الصحيحة أي أننا سنقدم الأعداد النسبية بشكل صفوف تكافؤ، عناصرها أزواج مرتبة من الأعداد الصحيحة، وسوف نرمز للزوج المرتب (س، ص) بالرمز $\frac{س}{ص}$ – حيث أن العدد الصحيح ص لا يساوي صفراً، ونعرف $\frac{ﺃ}{ب} = \frac{ﺟ}{د}$ إذاً





وفقط إذاً أ د = ب جـ أي أن السهولة البرهنة على أن علاقة المساواة هـذه هـي علاقة تكافؤ أي أنها انعكاسية متناظرة ومتعدية، وبـذلك فإنهـا تقسم مجموعـة أزواج الأعداد الصحيحة إلى صفوف تكـافؤ، كـل صـف يحتـوي جميـع الأزواج المتساوية.

(١-٦-١) تعريف:

العدد النسبي هو صف من الأزواج المتساوية

يمثل العدد النسبي بأي زوج من الأعداد الصحيحة التي تنتمـي إلى الـصف أعلاه وتمتلك الأعداد النسبية (الصفوف) المواصفات الآتية:

أ) $\frac{أ}{ب} = \frac{م أ}{م ب}$ لكل الأعداد الصحيحة م $\neq$ صفر

ب) إذا كان (أ، ب) = د بحيث أن ب = $ب_1$ د و أ = $أ_1$ د فإن:

$$\frac{أ_1}{ب_1} = \frac{أ}{ب}$$

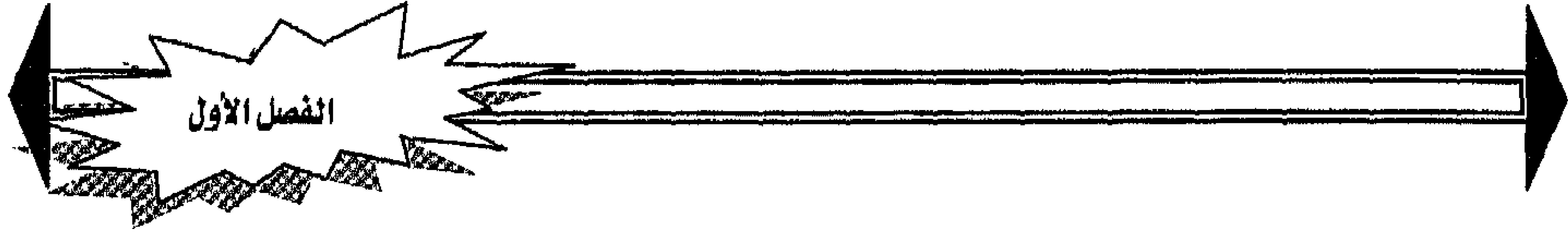
جـ) إذا كان (أ، ب) = ١ فإن:

$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} \longleftarrow$ أ د = ب جـ $\longleftarrow$ (جـ = م أ) و (د = م ب).

هذا يعني أن عناصر الصف الواحد تكـون علـى شـكل $\frac{أم}{بم}$ حيـث أن م تمثل أي عدد صحيح لا يساوي صفراً.

بشكل عام إذا كان (أ، ب) = د > ١ حيـث أن أ = أ.د و ب = $ب_1$ د





فإننا بدلاً من العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ نستخدم العدد النسبي $\frac{أ_1}{ب_1}$ الذي يساويه لذلك فإن الصف الذي يحتوي على $\frac{أ}{ب}$ سيمثل $\frac{أ_1}{ب_1}$ حيث أن $(أ_1 ، ب_1) = 1$ تعرف عمليات الجمع والطرح والضرب لأزواج الأعداد الصحيحة كما أن الجمع والطرح.

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{جـ}{د} = \frac{أد \pm ب جـ}{ب د}$$

الضرب $\left(\frac{أ}{ب}\right) \cdot \left(\frac{جـ}{د}\right) = \frac{أ جـ}{ب د}$

إن من الواضح أن العمليات أعلاه تعرف عمليات الجمع والطرح للصفوف أيضاً إذ لو عوضنا عن كل زوج بزوج آخر يساويه فإن الناتج سيكون زوجاً ينتمي إلى نفس صف الناتج الأصلي وبالتالي فإن هذه العمليات معرفة على الأعداد النسبية.

(٢-٦-١) خواص عمليات الجمع والضرب المعرفة على الأعداد النسبية

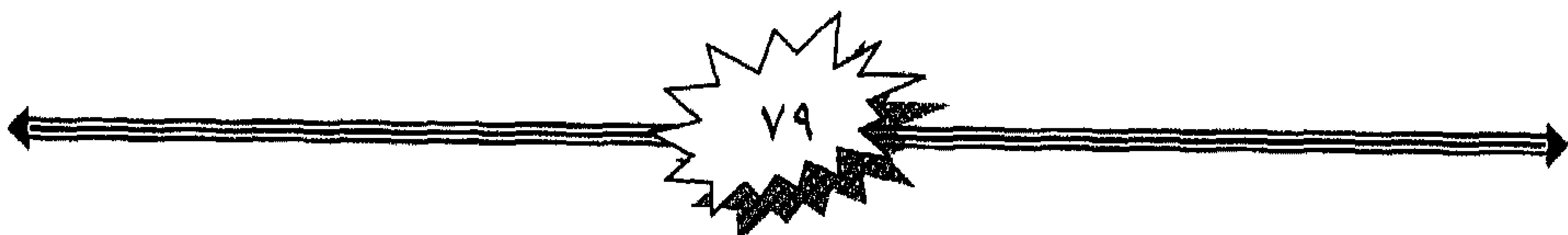
أ) قانون التجميع ١- بالنسبة للجمع

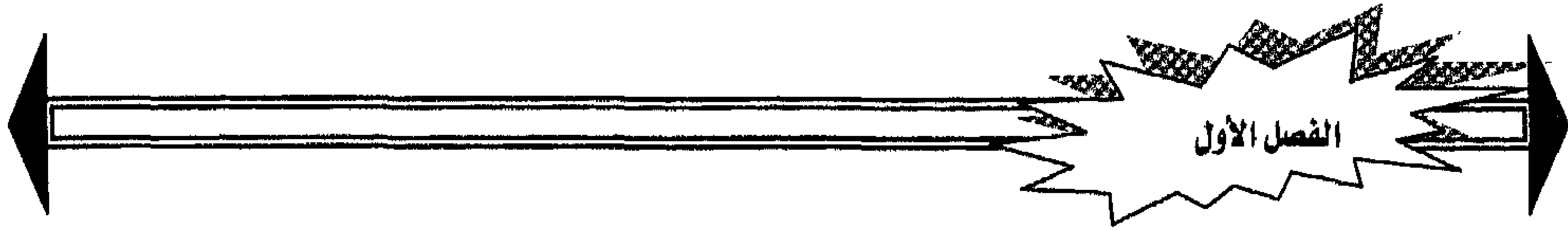
$$\frac{أ}{ب} + \left(\frac{جـ}{د} + \frac{هـ}{و}\right) = \left(\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د}\right) + \frac{هـ}{و}$$

٢) بالنسبة للضرب

$$\left[\left(\frac{أ}{ب}\right) \cdot \left(\frac{جـ}{د}\right)\right]\left(\frac{هـ}{و}\right) = \left(\frac{أ}{ب}\right) \cdot \left[\left(\frac{جـ}{د}\right) \cdot \left(\frac{هـ}{و}\right)\right]$$

ب) قانون الأبدال





١) بالنسبة للجمع

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \pm \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

٢) بالنسبة للضرب

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)\cdot\left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right) = \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right)\cdot\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$$

جـ) قانون التوزيع

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)\cdot\left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \mp \frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right) = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)\cdot\left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right) \mp \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)\cdot\left(\frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right)$$

وكذلك:

$$\left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \mp \frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right)\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) = \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right)\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) \pm \left(\frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right)\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$$

د) قانون الحذف

١) بالنسبة للجمع والطرح

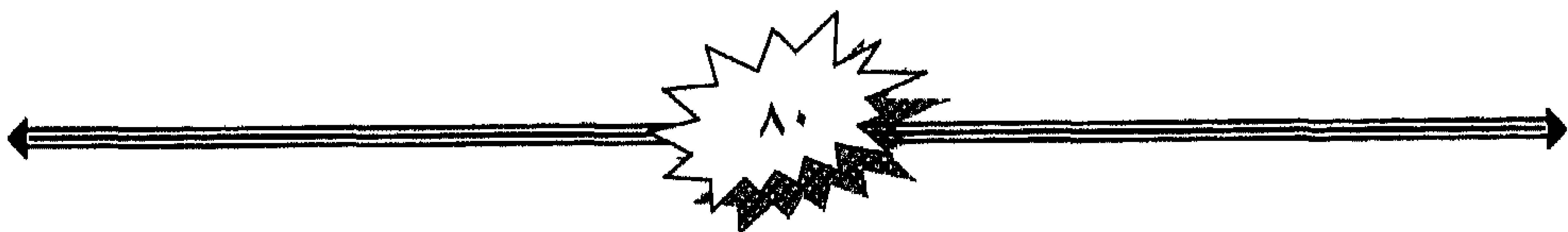
$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \mp \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \mp \frac{\text{هـ}}{\text{و}} \leftarrow \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$$

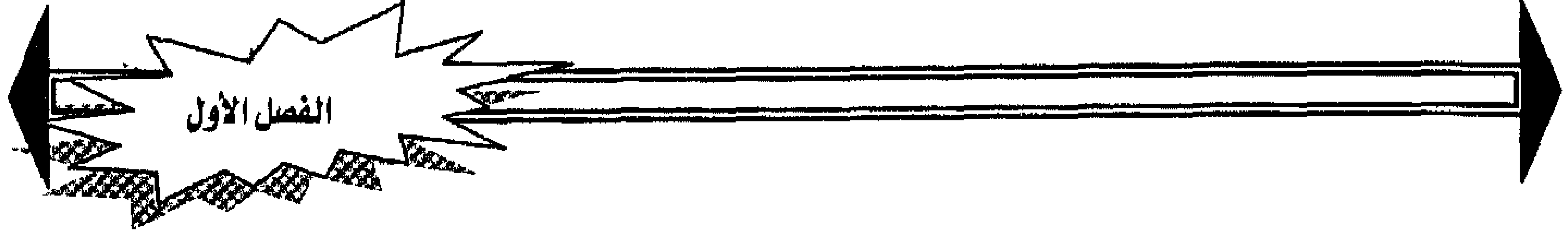
٢) بالنسبة للضرب

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)\left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right) = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)\left(\frac{\text{هـ}}{\text{و}}\right)\ (\text{أ} \neq \text{صفر}) \leftarrow \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$$

العدد النسبي $\left(\frac{0}{1}\right)$ يكون محايداً بالنسبة للجمع ويسمى صفراً لكون

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{صفر}}{1} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$





لكل عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$

نظير العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ بالنسبة للجميع هو $\frac{-أ}{ب}$

لكون $\frac{أ}{ب} + \left(\frac{-أ}{ب}\right) = \frac{(أب - أب)}{ب^2} = \frac{صفر}{1}$.

العدد النسبي $\frac{1}{1}$ يكون محايداً بالنسبة للضرب لكون $\left(\frac{أ}{ب}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{أ}{ب}$ لكل عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$.

إذاً كان أ $\neq$ صفر و ب $\neq$ صفر فإن العدد النسبي $\frac{ب}{أ}$ يكون النظير للعدد النسبي $\frac{أ}{ب}$.

بالنسبة لعملية الضرب لأن:

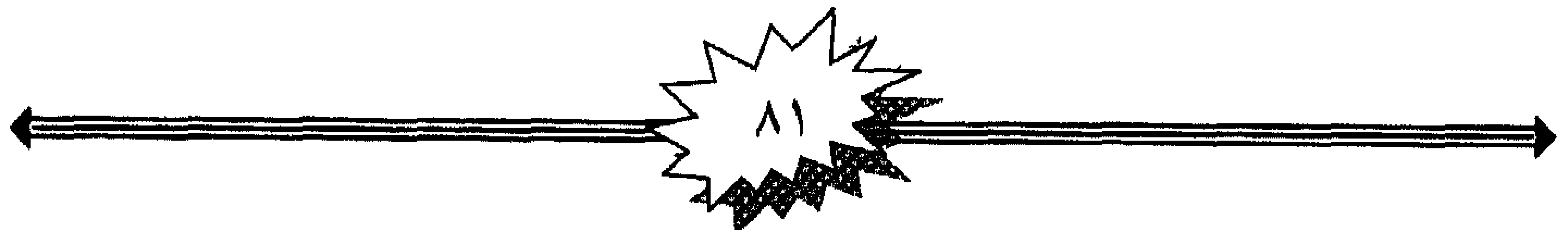
$$\left(\frac{أ}{ب}\right)\left(\frac{ب}{أ}\right) = \frac{أب}{بأ} = \frac{1}{1}$$

(٣-٦-١) عملية القسمة:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{جـ}{د}$ زوجين من الأعداد الصحيحة فإن $\frac{أ}{ب}$ يقبل القسمة على $\frac{جـ}{د}$ إذاً وفقط إذا وجد زوج من الأعداد الصحيحة $\frac{س}{ص}$ بحيث أن:

$$\frac{أ}{ب} = \left(\frac{س}{ص}\right)\left(\frac{جـ}{د}\right).$$

لو كان جـ = صفر فإن أ = صفر وهذا يعني بأن $\frac{س}{ص}$ ممكن أن يكون أي



زوج من الأعداد الصحيحة لو كان جـ ≠ صفر فإن $\frac{\text{أد}}{\text{بجـ}}$ هو الزوج المطلوب.

واضح أن التعريف أعلاه يعرف عملية القسمة للأعداد النسبية ولذلك فإن ما تقدم يبين أن أي عدد نسبي يقبل القسمة على أي عدد نسبي لا يساوي صفراً وهذا يعني أن مجموعة الأعداد النسبية التي لا تساوي صفراً تكون مغلقة بالنسبة لعملية القسمة كما أن مجموعة الأعداد النسبية مغلقة بالنسبة للجمع والطرح والضرب.

(٤-٦-١) مبرهنة:

الأعداد الصحيحة تتشاكل تقابلياً مع مجموعة جزئية من الأعداد النسبية.

البرهان:

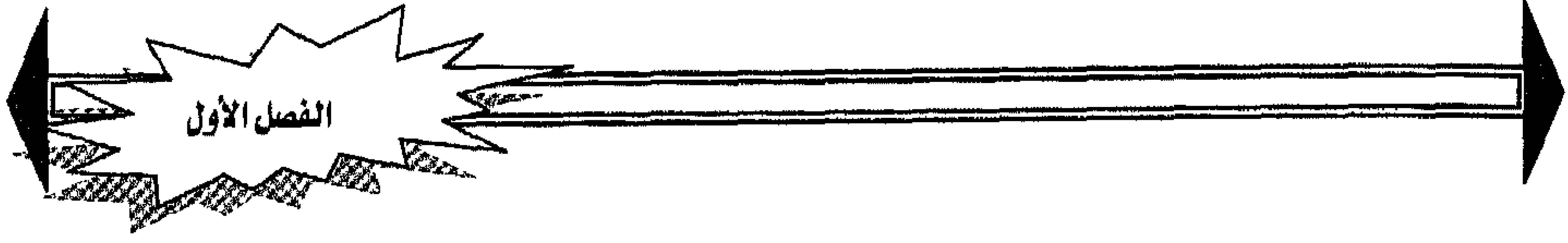
لو أخذنا مجموعة الأعداد النسبية $\left\{\frac{\text{أ}}{\text{١}}\right\}$ وعرفنا الدالة بين هذه المجموعة وبين الأعداد الصحيحة بحيث يكون لكل عدد نسبي $\frac{\text{أ}}{\text{١}}$ عدد صحيح أ وبالعكس أي لكل عدد صحيح أ عدد نسبي $\frac{\text{أ}}{\text{١}}$ كما موضح أدناه: $\frac{\text{أ}}{\text{١}} \leftrightarrow \text{أ}$

فإن هذه الدالة ستكون تشاكلاً تقابلياً لكونها متباينة وشاملة كما أنها تحقق ما يلي:

أ) إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{١}} \leftrightarrow \text{أ}$ ، $\frac{\text{ب}}{\text{١}} \leftrightarrow \text{ب}$ فإن

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{١}}+\frac{\text{ب}}{\text{١}}\right) \to \text{أ}+\text{ب}$$

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{١}}\right)\left(\frac{\text{ب}}{\text{١}}\right) \to \text{أب}$$



وكذلك:

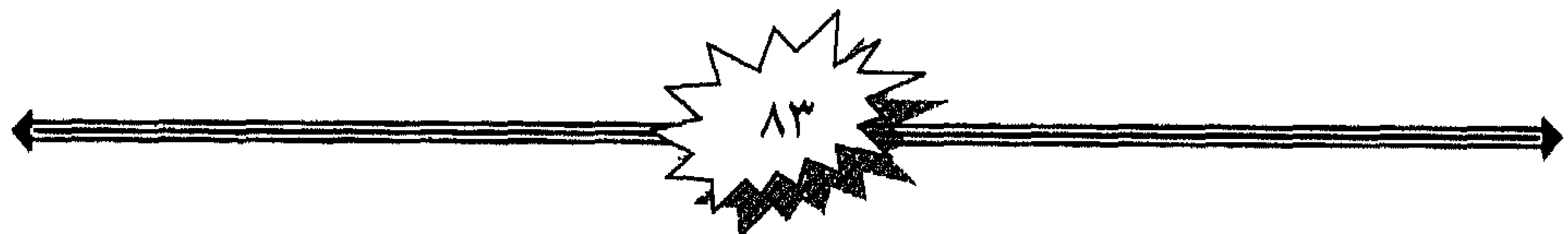
إذن تتشاكل الأعداد الصحيحة تقابلياً مع مجموعة جزئية من الأعداد النسبية بعبارة أخرى يمكن اعتبار الأعداد الصحيحة مجموعة جزئية من الأعداد النسبية.

(٥-٦-١) الأعداد النسبية ككسور عشرية:

تاريخياً استخدم المصريون القدامى الكسور الاعتيادية التي بسطها ثابت هو العدد ١ أضاف إلى الكسر $\frac{٢}{٣}$ أي أنهم استخدموا الكسور:

$$\frac{٢}{٣}،\frac{١}{٢}،\frac{١}{٣}،\frac{١}{٤}،.......$$

كما أنهم لم يسمحوا بالتكرار في عملية تمثيل الكسور الأخرى فمثلاً الكسر $\frac{٢}{٥}$ يمثل $\left(\frac{١}{٣}+\frac{١}{١٥}\right)$ والكسر $\frac{٢}{٧}$ يمثل بـ $\left(\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢٨}\right)$ وهكذا بطبيعة الحال أن استخدام هذه الكسور بهذه الصورة غير عملي. والبابليون استخدموا الكسور الاعتيادية التي مقامها ثابت وهو العدد ٦٠ حيث كان نظامهم، كما نعرف، ستينياً وما يزال معمولاً بها في بعض المجالات فمثلاً الساعة الواحدة تقسم إلى ٦٠ دقيقة والدقيقة إلى ٦٠ ثانية وهكذا أما اليوم فإن الكسور الأكثر شيوعاً هي التي مقامها عشرة أو قوى العدد عشرة لكون منظومة الأعداد التي تتعامل معها أساسها عشرة وهو الذي أدى إلى بروز تمثيل آخر للكسور يسمى بالكسور العشرية.



فمثلاً الكسر $\frac{٣}{١٠}$ يمثل ٠,٣.

والكسر $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥ والكسر $\frac{٥}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣٥ وهكذا.....

إن الكسور، أعداد نسبية والأعداد النسبية بشكل عام يمكن تحويلها إلى أعداد صحيحة مع كسر عشري وكما يلي:

ليكن $\frac{ج}{د}$ عدداً نسبياً، نعرف مما سبق بأن هناك أعداداً صحيحة أ، ر٠.

بحيث أن $ج = أ\,د + ر_٠$ ، $د > ر_٠ \geq$ صفر

إذا كانت $ر_٠$ = صفر فإن $\frac{ج}{د} = أ$ أما إذا كانت $ر_٠ \neq$ صفر فإن:

$١٠\,ر_٠ = أ_١\,د + ر_١$ و $د > ر_١ \geq$ صفر

إذا كانت $ر_١$ = صفر فإن

$١٠\,ر_٠ = أ_١\,د \leftarrow ر_٠ = \frac{أ_١\,د}{١٠} \leftarrow \frac{ج}{د} = أ + \frac{أ_١}{١٠}$

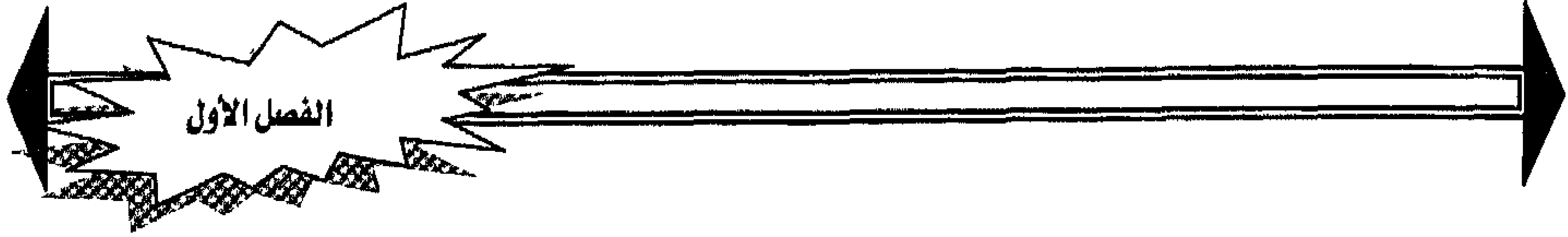
أما إذا كانت $ر_١ \neq$ صفر فإن

$١٠\,ر_١ = أ_٢\,د + ر_٢$ و $د > ر_٢ \geq$ صفر

وإذا كانت $ر_٢$ = صفر فإن

$١٠\,ر_١ = أ_٢\,د \leftarrow ر_١ = \frac{أ_٢\,د}{١٠} \leftarrow ١٠\,ر_٠ = أ_١\,د + \frac{أ_٢\,د}{١٠} \leftarrow ر_٠ = \frac{أ_١\,د}{١٠} + \frac{أ_٢\,د}{١٠^٢} \leftarrow \frac{ج}{د} = أ + \frac{أ_١}{١٠} + \frac{أ_٢}{١٠^٢}$

نستمر بهذه الطريقة حتى نتوصل إلى حالة فيها ($ر_ن$ = صفر) أو إلى حالة فيها $ر_ن \neq$ صفر ففي الحالة الأولى ($ر_ن$ = صفر) سيكون العدد الصحيح مع الكسر



العشري $أ،\ أ_{1}،\ أ_{2}،\ \ldots،\ أ_{ن}$ وهي القيمة المضبوطة للعدد النسبي، وفي الحالة الثانية (($ر_{ن} \neq$ صفر) باستمرار) نجد أن العدد الصحيح مع الكسر العشري سيكون $\frac{أ،\ أ_{1}،\ أ_{2}،\ \ldots،\ أ_{ن}}{أ،\ أ_{1}،\ أ_{2}،\ \ldots،\ أ_{م}}$ عندما نتوقف عند $أ_{م}$ معينة حيث تكون قيمة مقاربة إلى قيمة العدد النسبي.

في الواقع إن الكسر العشري غير المنتهي $أ،\ أ_{1}،\ أ_{2}،\ \ldots،\ أ_{ن}$ بحيث أن يكون دورياً لكون بواقي القسمة بالنسبة للمعيار د (المقسوم عليه) هي ١، ٢، ٣، ....، د-١ وبالتالي فإن تكرار هذه القيم حاصل لا محالة في المرتبة د إن لم يحصل قبلها هنا،أهملنا الصفر كباقي بالنسبة إلى د لأنه عندما $أ_{ن} =$ صفر فإن الكسر سيكون منتهياً لقد بينا فيما تقدم أن أي عدد نسبي ممكن أن يكتب على شكل عدد صحيح مع كسر عشري والكسر العشري يكون أما منتهياً أو دورياً.

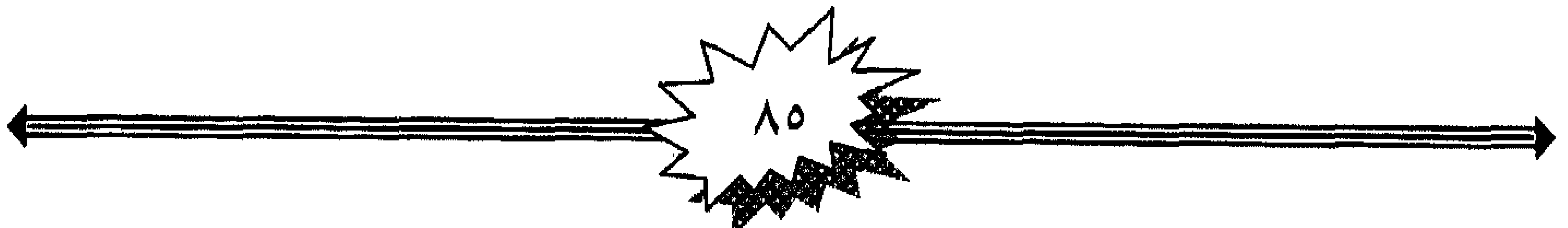
إن العدد الصحيح مع الكسر العشري عدداً عشرياً بقي أن نسأل هل العكس صحيح ؟ وبشكل أكثر تحديداً هل الكسر العشري المنتهي أو الدوري هو عدد نسبي ؟ من الواضح أن أي كسر عشري منته هو عدد نسبي إذ أن ٠، $أ_{1}،\ أ_{2}،\ \ldots،\ أ_{ن}$ هو:

$\frac{أ،\ أ_{1}،\ أ_{2}،\ \ldots،\ أ_{ن}}{10^{ن}}$ الآن نفرض أن (س) كسر عشري دوري أي أن

$$س = ٠،\ أ_{1}\ أ_{2}\ \ldots،\ أ_{ن}\ \overline{أ_{ن+1}\ \ldots\ أ_{ن}} + ك$$

حيث أن الخط الموضوع فوق $أ_{ن+1}\ \ldots\ أ_{ن} +$ ل يعني بأن هذه القطعة ستكرر بشكل مستمر عند استمرار القسمة، إذن:

$$10^{ن} س = أ_{1}\ أ_{2}\ \ldots،\ أ_{ن}\ و\ \overline{أ_{ن+1}\ \ldots\ أ_{ن+٥}}$$



$١٠^{ن+ك}$ س = $أ_١$، $أ_٢$ ....، $أ_{ن+٥}$ ، $أ_{ن+٥+١}$ ...... $أ_{ن+٢}$

إذن $١٠^{ن+ك}$س – $١٠^{ن}$س = ($أ_١$، $أ_٢$....، $أ_{ن+ك}$ - $أ_١$، $أ_٢$، ....، $أ_ن$)

أي أن س: $\frac{أ_١ أ_٢ ..... أ_{ن+٥} - أ_١ أ_٢ ...... أ_ن}{\left(١٠^{ن+ك} - ١٠^{ن}\right)}$

بذلك نكون قد برهنا ما يلي:

(٦-٦-١) مبرهنة:

أ) العدد النسبي يمثل بعدد عشري.

ب) العدد العشري يمثل بعدد نسبي إذا وفقط إذا الكسر العشري العائد إلى العدد العشري منتهياً أو دورياً.

مثال(٢٦):

الكسر العشري ٠,٣٥٢١ يمثل بالعدد النسبي $\frac{٣٥٢١}{١٠^{٤}}$ والكسر الاعتيادي $\frac{١}{٥}$ يمثل بالكسر العشري ٠,٢ بينما الكسر الاعتيادي $\frac{١}{٣}$ يمثل الكسر العشري ٠,٣٣٣

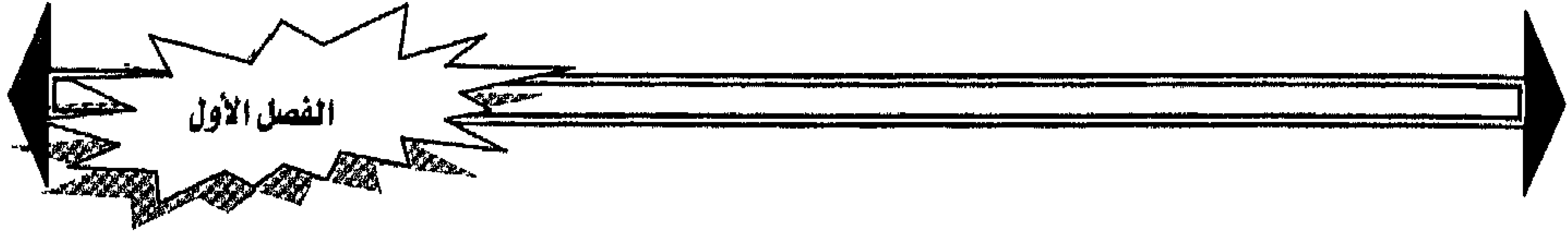
مثال(٢٧):

يمثل الكسر العشري س = ... ٠,٣٦٣٦٣٦ بالعدد النسبي الذي يحسب كما يلي:

١٠٠س = ... ٣٦,٣٦٣٦

إذن س =... ٠,٣٦٣٦

وبالتالي فإن: ١٠٠س – س = ٣٦



٩٩س = ٣٦ ⟵ س = $\frac{٣٦}{٩٩}$

مثال(٢٨):

يمثل الكسر العشري ..... ٠,١٥٢٤٤٤ = س بالعدد النسبي الذي يحسب كما يلي:

١٠٠٠ س = ... ١٥٢,٤٤٤

إذن س = ... ٠,١٥٢٤٤٤

١٠٠٠ س – س = (١٥٢,٤٤٤ – ٠,١٥٢٤٤٤)

٩٩٩ س = ١٥٢,٢٩٢

س = $\frac{١٥٢,٢٩٢}{٩٩٩}$

تمارين (٦-١):

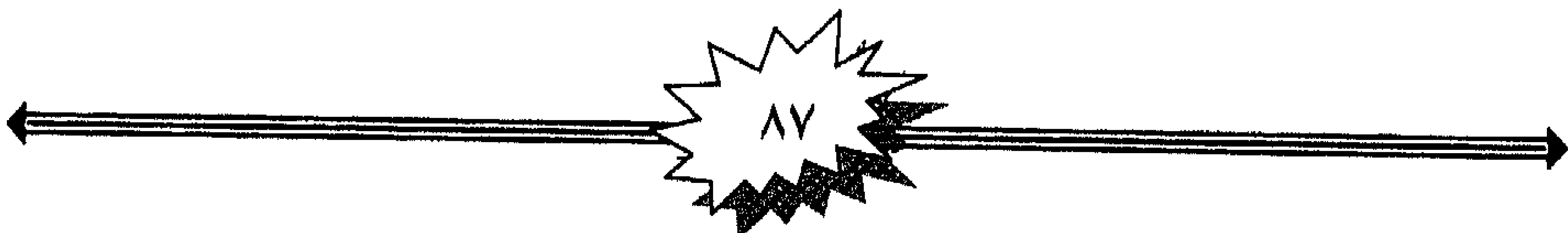
١- برهن أن $\sqrt{٣}$ عدد غير نسبي.

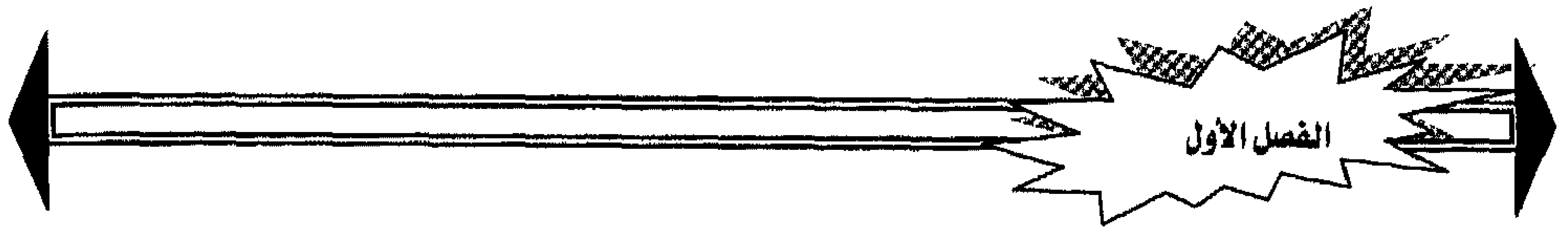
٢- مثل الأعداد النسبية الآتية على شكل أعداد عشرية:

$\frac{١}{٧}$، $\frac{٢}{٥}$، $\frac{٧}{٩}$، $\frac{٣}{٧}$، $\frac{٣٧}{١٤}$، $\frac{٥}{١٢}$، $\frac{٧}{٦٠}$

٣- مثل الكسور العشرية الآتية على شكل كسور اعتيادية:

٠,٣٢٣٢$\overline{٣٢}$، ٠,٨٥٧١٤٢$\overline{٨٥٧١٤٢}$، ٠,٨٥٧٤٠١٠٢، ٠,٠٢١٣$\overline{٥١}$، ٠,١٨٥٢$\overline{١٣}$

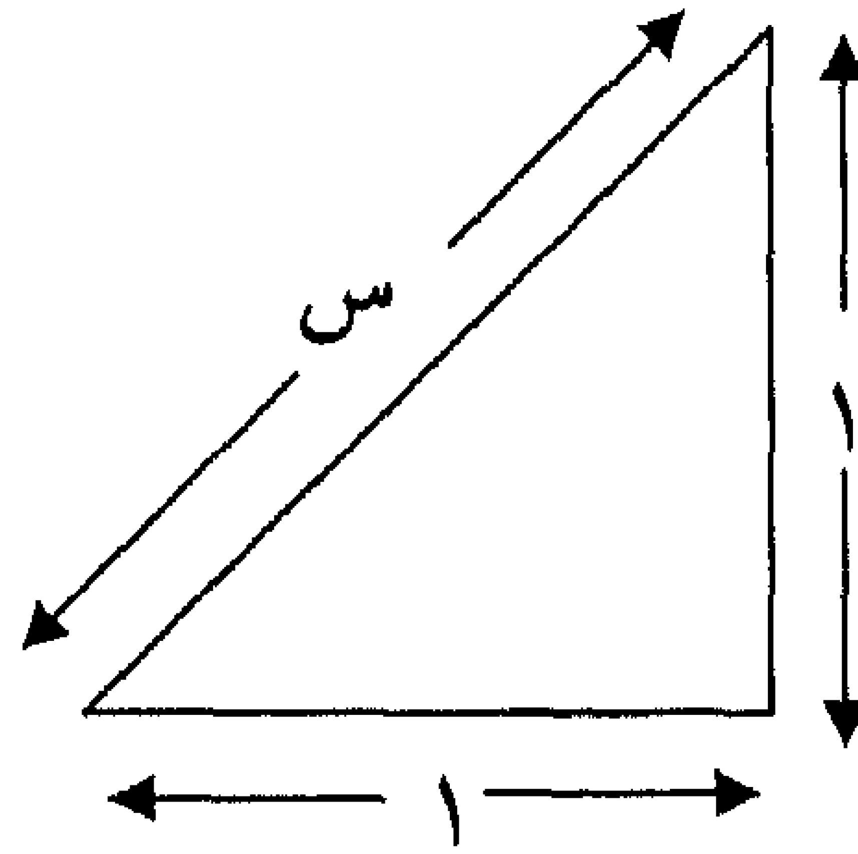




٤- إذا كان أساس نظام الترقيم هو العدد ٥ بدلاً من ١٠ فيكن تمثل العدد النسبي $\frac{ج}{د}$ على شكل عدد خمسي (على غرار عدد عشري).

(١-٧) الأعداد الحقيقية:

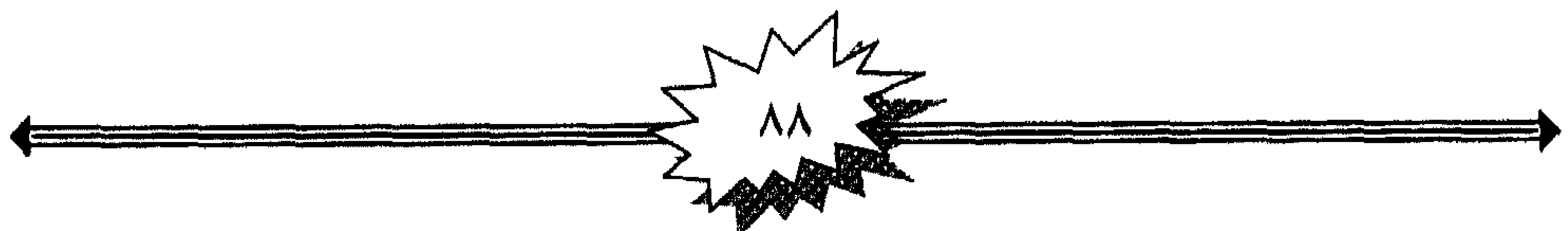
لو سألنا ما طول الوتر للمثلث القائم الزاوية والمتساوي الساقين الذي طول ساقه وحدة واحدة وكما موضح في الرسم أدناه:



فإن الجواب واضح وهو العدد س الذي يحقق المعادلة $س^{٢} = ٢$ وواضح أيضاً بأن هذه المعادلة لا حل لها في الأعداد النسبية لأنه لو كان هناك عدد نسبي $\frac{ل}{ك}$، (ل، ك) = ١ بحيث إن $\frac{ل^{٢}}{ك^{٢}} = ٢$ فإن $ل^{٢} = ٢ ك^{٢}$

وهذه كما نعرف لا حل لها في الأعداد الصحيحة (ل، ك) انظر المثال (٢٥).

كذلك لو سألنا عند الكسر العشري غير المنتهي وغير الدوري مثل ... ٠,٣٢٣٢٢٣٢٢٣ وماذا يمثل من الأعداد النسبية فإنا لجواب سيكون سلبياً أيضاً حسب المبرهنة السابقة إضافة لذلك هناك حالات كثيرة لا تستطيع الأعداد



النسبية تلبية متطلباتها من هنا كانت الضرورة في توسيع منظومة الأعداد لتـشمل الأعداد غير النسبية إضافة إلى الأعداد النسبية لنحصل على ما يـسمى بالأعـداد الحقيقية.

(١-٧-١) تعريف

الأعداد الحقيقية هي أعداد عشرية سواء كانت منتهية أم لا.

(١-٧-٢) تعريف

إذا كانت ر عدداً نسبياً فإن الجذر التربيعي إلى ر هو العدد النسبي س (إن وجد) بحيث أن $س^{٢} = ر$

يرمز إلى الجذر التربيعي للعدد النسبي ر بالرمز $\sqrt{ر}$.

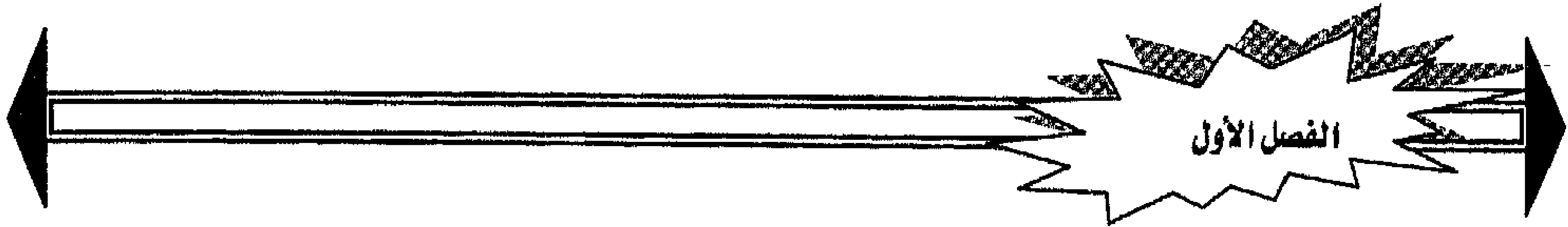
مثال ٢٩: $\sqrt{٢٥}=٥$ ، $\sqrt{١}=١$ ، $\sqrt{\frac{١}{٤}}=\frac{١}{٢}$ **بالإمكان تعميم تعريف الجذر كما يلي:**

(١-٧-٣) تعريف:

إذا كانـت ر عـدداً نـسبياً، ن عـدداً طبيعيـاً فـإن الجـذر ن إلى ر هـو العـدد النـسبي س (إن وجـد) بحيـث $س^{ن} = ر$ يرمـز للجـذر النـوني للعـدد النسبي ر بالرمز $\sqrt[ن]{ر}$.

مثال(٣٠): $\sqrt[٣]{٨}=٢$ ، $\sqrt[٣]{١٢٥}=٥$ ، $\sqrt[١٠]{١٠٢٤}=٢$

الآن نعود إلى المثلث القائم الزاوية حيث أن قيمة س الـتي تحقـق المعادلـة $س^{٢} = ٢$ هي $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٢}$ كما بينا عدد غير نسبي، لذلك سنحاول أن نجد متتابعـة تقترب من قيمة هذا العدد كما موضح أدناه:



إن العدد ٢ يقع بين $١^{٢}$، $٢^{٢}$ فهو يقع بين حدين متعاقبين من المتابعة

$(١,١)^{٢}$، $(١,١)^{٢}$، $(١,٢)^{٢}$، ,,,,, $(١,٩)^{٢}$

وواضح أيضاً بأن $(١,٥)^{٢}$ < ٢ < $(١,٤)^{٢}$

الآن نضيف مرتبة أخرى إذ أن ٢ تقع بين حدين متعاقبين من المتابعة

$(١,٤)^{٢}$ $(١,٤١)^{٢}$ $(١,٤٢)^{٢}$، ....، $(١,٤٩)$ $(١,٥٠)^{٢}$

وواضح أيضاً بأن $(١,٤٢)^{٢}$ < ٢ < $(١,٤١)^{٢}$

نستمر بهذا الأسلوب فنحصل على:

$٢^{٢}$ < ٢ > $١^{٢}$

$(١,٥)^{٢}$ < ٢ > $(١,٤٠)^{٢}$

$(١,٤٢)^{٢}$ < ٢ > $(١,٤١)^{٢}$

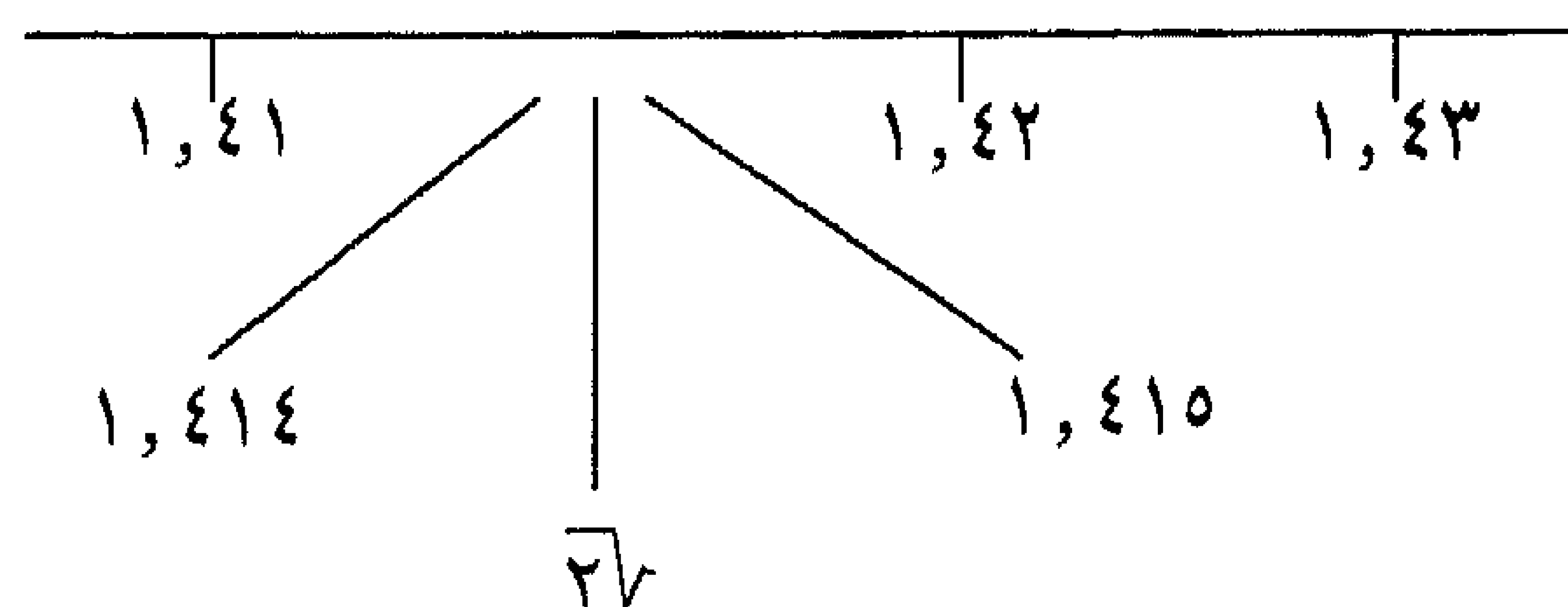
$(١,٤١٥)^{٢}$ < ٢ > $(١,٤١٤)^{٢}$

$(١٤١٤٣)^{٢}$ < ٢ > $(١,٤١٤٢)^{٢}$

هذه المتابعة نستمر بلا نهاية لذلك فإن أية قيمة إلى $\sqrt{٢}$ هي قيمة تقريبية.

مثلاً بالإمكان الاكتفاء بالمرتبة الرابعة واعتبار قيمة $\sqrt{٢}$ أي من الأعداد المصورة بين ١,٤١٤٢ و ١,٤١٤٣ وهكذا إضافة إلى ما تقدم فإن بالإمكان تمثيل الأعداد النسبية كنقاط على خط مستقيم بحيث تكون لكل عدد نسي نقطة واحدة مرتبطة به عند ذاك فإن الفترات التي تحدد قيمة $\sqrt{٢}$ في المتابعة أعلاه ستصغر شيئاً فشيئاً باتجاه الأطباق على النقطة التي نحس بأنها تمثل العدد غير النسبي $\sqrt{٢}$ وكما موضح أدناه.





كذلك بالنسبة للعدد غير النسبي ص = ... ٠,٣٢٣٢٢٣٢٢٢٣ نستطيع أن نبين بأن هناك نقطة في قطعة مستقيم مرتبطة به من خلال تصغير الفترة المحددة لهذا العدد غير النسبي شيئاً فشيئاً كما مبين أدناه:

٠ > ص > ١

٠,٣ > ص > ٠,٤

٠,٣٢ > ص > ٠,٣٣

٠,٣٢٣ > ص > ٠,٣٢٤

وبشكل عام فإن بالإمكان وبنفس الطريقة تبيان أن للجذور الأخرى التي تشكل أعداداً غير نسبية إضافة إلى بعض الأعداد النسبية مثل π نقاطاً على المستقيم مرتبطة بها هذه النقاط تحدد عن خلال المتتابعة التي تحدد قيمة العدد غير النسبي.

تمارين (٧-١):

١- احسب $\sqrt{٤٩}$ ، $\sqrt{\frac{١}{٩}}$ ، $\sqrt{٢٢٥}$

٢- بين أن $\sqrt{٢١} \neq ٥$ وكذلك: $\sqrt{٢١} \neq ٤,٤$

٣- احسب $\sqrt[3]{٢١٦}$ ، $\sqrt[3]{\frac{٢٧}{٨}}$

٤- جد الجذور التالية مقربة إلى أربعة مراتب عشرية

$\sqrt{٢٨}$ و $\sqrt{٧}$ و $\sqrt{٥}$ و $\sqrt{٢١٣}$

٥- جد متتابعة من المتباينات التي تعطي فترات تصغر وتصغر لكل من الأعداد العشرية التالية:

ص = ٠,٤١٤١١٤١١١٤ / $\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢٢٠٥ / π = ٣,١٤١٥٩

٦- بين بأن $\sqrt{٥}$ يقع بين ٢ , ٣ أي أن $٢ < \sqrt{٥} < ٣$

(١-٨) الأعداد العقدية Complex Numbers

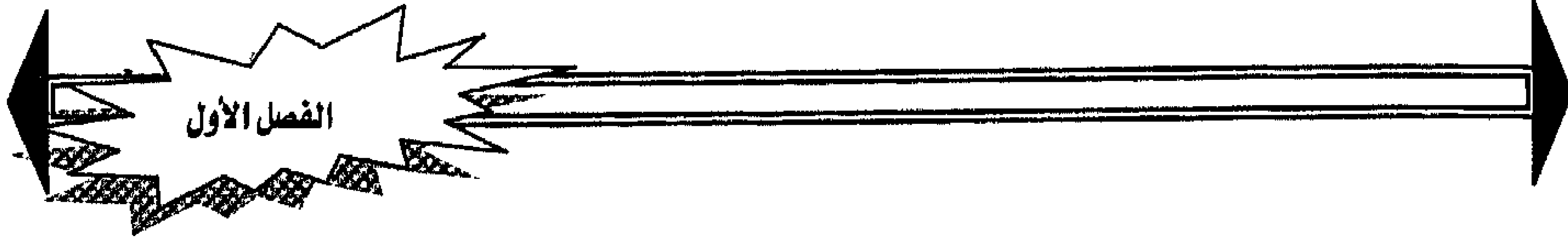
إن المعادلة $س^{٢} + ٢ = ٠$ لا حل لها في مجموعة الأعداد الحقيقية لأن مربع أي عدد حقيقي يكون موجباً أو صفراً ولذلك فإن حل مثل هذه المعادلات يتطلب توسيع منظومة الأعداد الحقيقية إلى منظومة الأعداد العقدية.

(١-٨-١) تعريف:

العدد العقدي هو زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز (أ، ب)

(١-٨-٢) تعريف:

(أ، ب) = (جـ، د) إذا وفقط إذا أ = جـ و ب = د



(٣-٨-١) تعريف:

العمليات الثنائية على الأعداد العقدية.

ﺃ) الجمع (ﺃ، ب) + (جـ، د) = (ﺃ + جـ، ب + د).

ب) الضرب (ﺃ، ب) (جـ، د) = (ﺃ جـ - ب د، ﺃد + ب جـ).

الأعداد العقدية مع عمليتي الجمع والضرب تحقق القوانين التالية:

أولاً: التجميع

ﺃ) بالنسبة للجمع:

[(ﺃ، ب) + (جـ، د)] + (هـ، و) = (ﺃ، ب) + [(جـ، د) + (هـ، و)]

ب) بالنسبة للضرب:

[(ﺃ، ب) . (جـ، د)] (هـ، و) = (ﺃب) [(جـ، د) (هـ، و)]

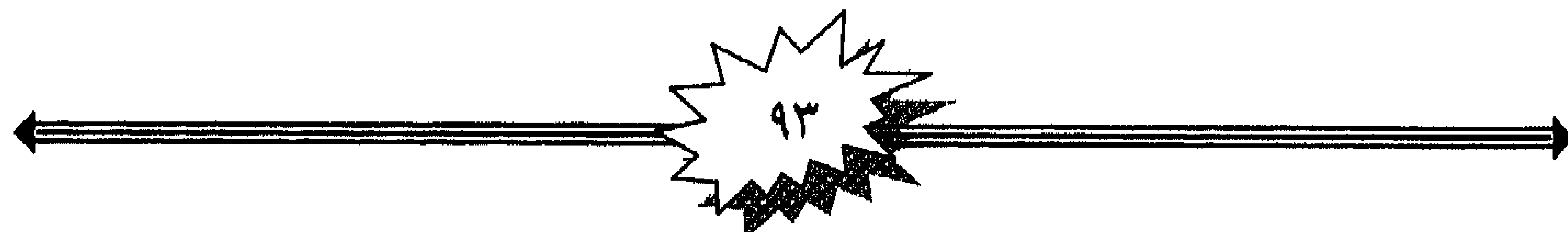
ثانياً) الإبدال

ﺃ) بالنسبة للجمع:

(ﺃ، ب) + (جـ، د) = (جـ، د) + (ﺃ، ب)

ب) بالنسبة للضرب:

(ﺃ، ب) (جـ، د) = (جـ، د) (ﺃ، ب)



ثالثاً: التوزيع

(م، ب) ((جـ، د) + (هـ، و)) = (م ب) (جـ، د) +(م، ب) (هـ، و)

وكذلك

((جـ، د) + (هـ، و)) . (م، ب) = (جـ، د) . (م، ب) + (هـ، و) (م، ب)

وللطالب أن يتحقق من صحة هذه القوانين

بما أن (م، ب) + (٠، ٠) = (م، ب)

(م، ب) + (-م، - ب) = (٠، ٠)

$$(م،ب)\left(\frac{م}{م^{٢}+ب^{٢}}،\frac{-ب}{م^{٢}+ب^{٢}}\right)=(١،٠)$$

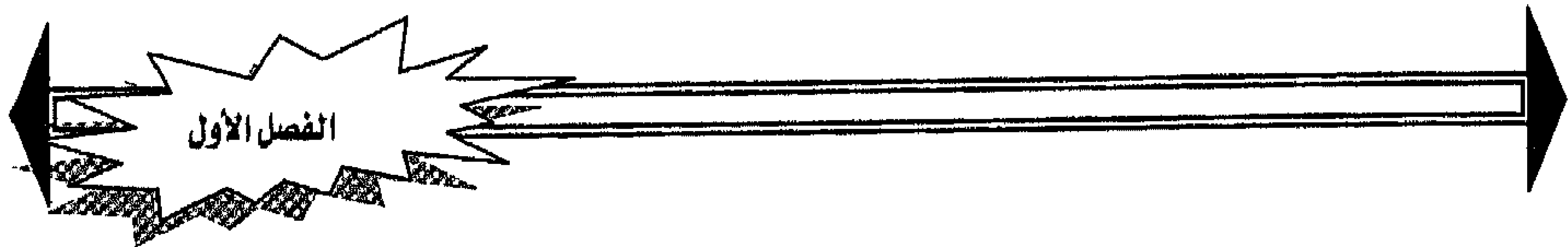
(م، ب) + (١، ٠) = (م، ب)

فإن العدد العقدي (٠، ٠) هو العنصر المحايد بالنسبة للجمع ويسمى (الصفر) ولذلك فإن (-م، - ب) هو نظير (م، ب) بالنسبة للجمع وإذا كان (م، ب) $\neq$ (٠، ٠) فإن:

$\left(\frac{م}{م^{٢}+ب^{٢}}،\frac{-ب}{م^{٢}+ب^{٢}}\right)$ هو نظير (م، ب) بالنسبة للضرب.

العدد العقدي (٠، ١) هو العنصر المحايد لعملية الضرب، نعرف(-م، - ب) بالرمز - (م، ب).

قانون الحذف يتحقق بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب وكما موضح أدناه إذا كان (م، ب) + (جـ، د) = (م، د) + (هـ، و) فإن:



(م + جـ، ب + د) = (م + هـ، ب + و)

وهـذا يعـني أن م + جـ = م + هـ وكـذلك ب + د = ب + و باسـتخدام قانون الحذف بالنسبة للأعداد الصحيحة نحصل على جـ = هـ و د = و

وبالتالي: (جـ، د) = (هـ، و)

للبرهنة على أن الأعداد العقدية تحقق قانون الحذف بالنسبة للضرب سنبرهن أولاً عدم وجود قواسم الصفر في منظومة الأعداد العقدية.

(٤-٨-١) مبرهنة تمهيدية:

إذا كان:

(م، ب) (جـ، د) = (٠، ٠) فـإن (م، ب) = (٠، ٠) أو (جـ، د) = (٠، ٠)

البرهان:

نفرض أن (جـ، د) ≠ (٠، ٠) أي أن جـ ≠ صفر أو د ≠ صفر.

سنبرهن أن (م، ب) = (٠، ٠) واضح أن:

(م، ب) = (جـ، د) = (٠، ٠) ⟵ (م جـ - ب د، م د + ب د) = (٠، ٠)

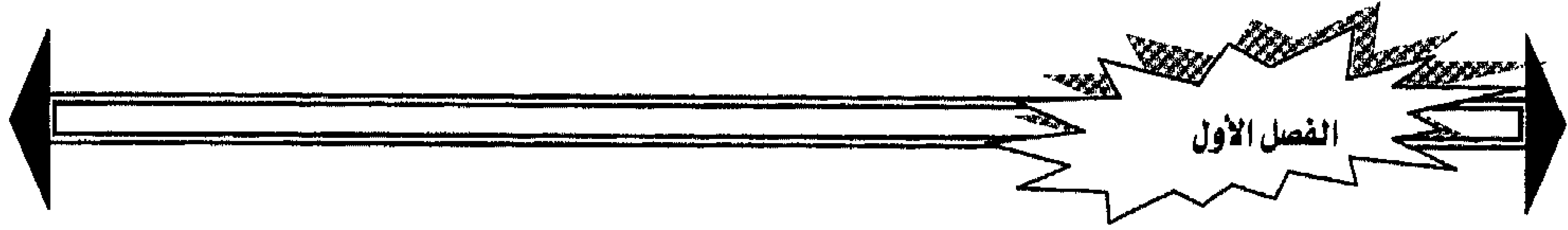
⟵ (م جـ - ب د = صفر) و (م د + ب د= صفر)

⟵ (م جـ = ب د) و (جـ م د + جـ ب جـ = صفر) بالضرب في جـ

⟵ ب $د^{٢}$ + ب $جـ^{٢}$ = صفر بالتعويض عن ب د ⟵ م جـ

⟵ ب ($د^{٢}$ + $جـ^{٢}$) = صفر





ب = صفر

د = جـ = صفر ⟷ د^{٢} + جـ^{٢} = صفر

إذا كانت جـ ≠ صفر فإن:

ﻫ جـ = ب د = صفر د = صفر ⟵ ﻫ = صفر

أما إذا كانت د ≠ صفر فإن ﻫ د= ب جـ = جـ ×٠ = ٠ ⟵ ﻫ = صفر

إذن (ﻫ، ب) = (٠، ٠)

سيكون الآن برهان قانون الحذف بالنسبة للضرب بسيطاً جداً

(٥-٨-١) نتيجة:

إذا كان (ﻫ، ب) (هـ، و) = (ﻫ، ب) (جـ، د) وكان أيضاً (ﻫ، ب) ≠ (٠، ٠) فإن:

(هـ، و) = (جـ، د)

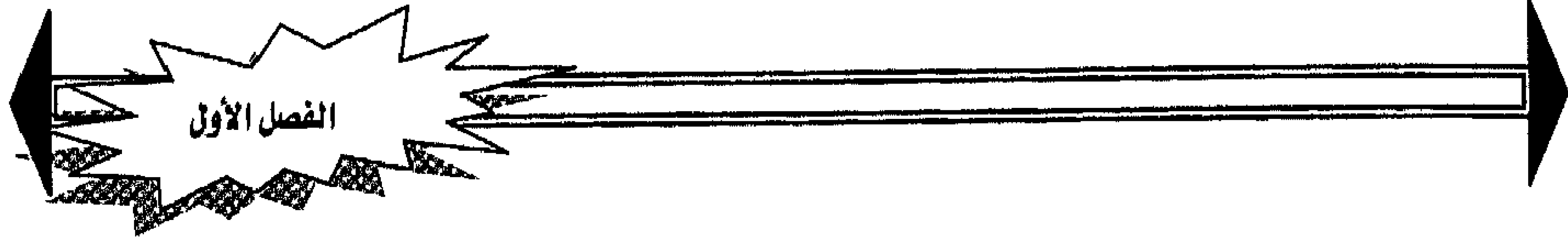
البرهان:

(ﻫ،ب) (جـ، د) = (ﻫ، ب)(هـ، و) ⟵ (ﻫ، ب)(جـ، د)- (ﻫ، ب)(هـ، و) =(٠، ٠)

⟵ (ﻫ، ب) ((جـ، د) - (هـ، و)) = (٠، ٠) ⟵ (جـ، د)- (هـ، و) = (٠، ٠)

⟵ (جـ، د)= (هـ، و)





(٦-٨-١) القسمة

العدد العقدي (جـ، د) يقسم العدد العقدي (ﺃ، ب) إذاً وفقط إذا وجد عدد عقدي (س،ص) بحيث أن (ﺃ، ب) = (س،ص) (جـ، د)

من الواضح أنه إذا كان (جـ، د) ≠ (٠، ٠) فإن الحل (س،ص) إلى المعادلة:

$$\left(\frac{\text{ﺃجـ}+\text{بد}}{\text{جـ}^{٢}+\text{د}^{٢}} ، \frac{\text{بجـ}-\text{ﺃد}}{\text{جـ}^{٢}+\text{د}^{٢}}\right)$$

(ﺃ، ب) = (س،ص) (جـ، د) سيكون

وهذا يعني أن مجموعة الأعداد العقدية مغلقة بالنسبة لعملية القسمة ما عدا القسمة على الصفر طبعاً.

(٧-٨-١) مبرهنة:

الأعداد الحقيقية متشاكلة تقابلياً مع مجموعة جزئية من الأعداد العقدية:

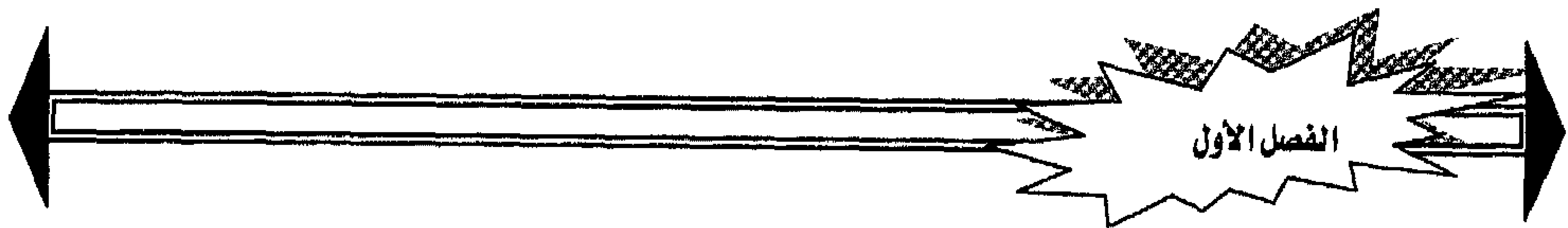
البرهان:

نعرف الدالة بين المجموعة الجزئية هـ = {(ﺃ، ٠): ﺃ ∈ح } من الأعداد العقدية والأعداد الحقيقية بحيث يكون لكل عدد عقدي (ﺃ، ٠) عدد حقيقي واحد هو ﺃ وبالعكس أي أن (ﺃ، ٠) ⟵ ﺃ

ومن الواضح أن هذه الدالة متباينة وشاملة. فإذا كان:

(ﺃ، ٠) ⟵ ﺃ و (ب، ٠) ⟵ ب فإن





(أ، ٠) + (ب، ٠) = (أ + ب، ٠) ⟵ أ + ب وكذلك

(أ، ٠) × (ب، ٠) = (أ ب، ٠) ⟵ أ × ب

إذن، هناك تشاكل تقابلي بين الأعداد الحقيقية والمجموعة الجزئية هـ من الأعداد العقدية للطالب أن يبرهن بأن المجموعة الجزئية { (٠، أ): أ ∋ح } من الأعداد العقدية ليست متشاكلة تقابلياً مع الأعداد الحقيقية

لو رمزنا للعدد العقدي (٠، ١) بالرمز فإننا نلاحظ أن

ق^{٢} = (٠، ١) (٠، ١) = (-١، ٠) = - (١، ٠) وكذلك

(أ، ٠) (٠، ١) = (٠، أ)

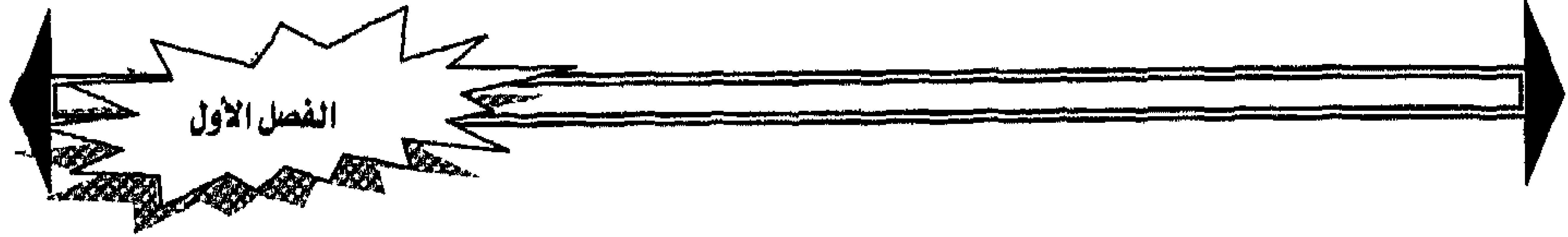
(أ، ب) = (أ، ٠) + (٠، ١) (ب، ٠)

ولو عرضنا عن الأعداد العقدية (أ، ٠) (ب، ٠) و (٠، ١) بما يقابلها من الأعداد الحقيقية أي أ و ب و١ على التوالي فإن العدد العقدي (أ، ب) سيكون أ + ب ڡ وهو تمثيل آخر للعدد العقدي

عندما نستخدم الرمز أ + ب ق لكن نمثل العدد العقدي (أ، ب) فمن الطبيعي أننا نجري جميع العمليات المعرفة على الأعداد العقدية مع ملاحظة أن ڡ^{٢} = - (١، ٠) = -١ لهذا السبب فإننا نرمز عادة للرمز ڡ بالرمز $\sqrt{-١}$ من الواضح أن التمثيليين للأعداد العقدية متشاكلان تقابلياً ولذلك نستخدم التمثيل أ + ب ڡ للعدد العقدي من الآن فصاعداً بدلاً من (أ، ب) إلا إذا كانت هناك ضرورة لاستعمال التمثيل الأخير.

في العدد العقدي + ب ق يسمى العدد الحقيقي أ بالجزء الحقيقي بينما يسمى ب بالجزء الخيالي.





(١-٨-٨) تعريف:

العدد العقدي أ - ب ت يسمى مرافق العدد العقدي أ + ب ت

ومن الواضح أن (أ + ب ت) (أ - ب ت) = $أ^٢ + ب^٢$

أي أن حاصل ضرب أي عدد عقدي في مرافقة يكون عدداً حقيقياً

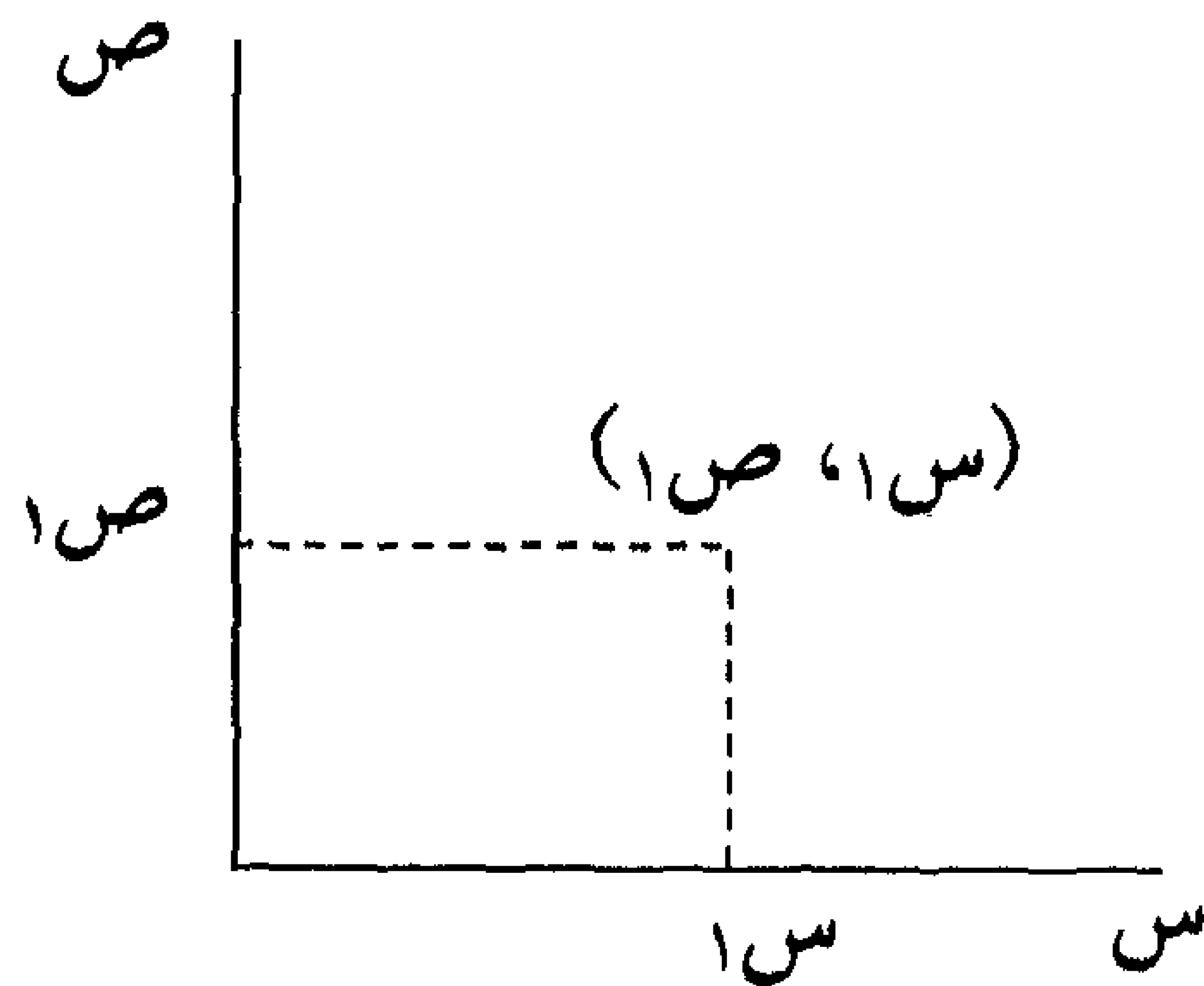
مثال ٣١: جد الجزء الحقيقي والجزء الخيالي للعدد العقدي $\frac{١}{١+ق}$

الحل: $\frac{١}{١+ق} = \frac{١}{١+ق} \cdot \frac{١-ق}{١-ق} = \frac{١-ق}{١^٢+١^٢} = \frac{١}{٢}(١-ق)$

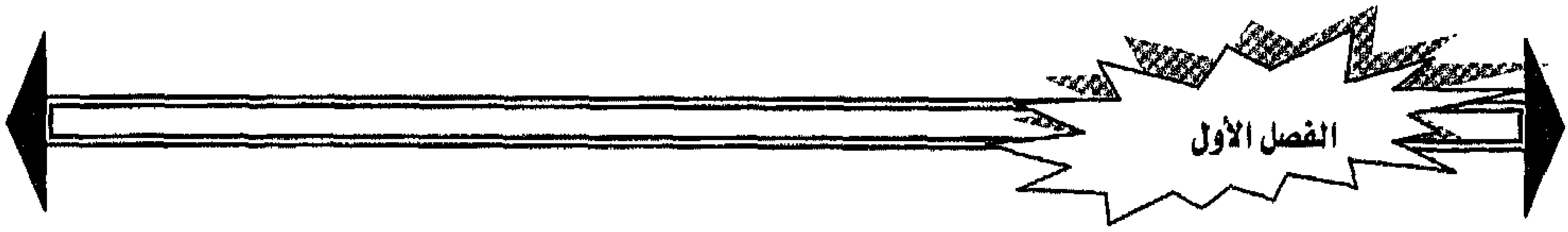
وعليه فإن الجزء الحقيقي هو $\frac{١}{٢}$ بينما الجزء الخيالي هو $\frac{-١}{٢}$

(١-٨-٩) التمثيل الهندسي للأعداد العقدية

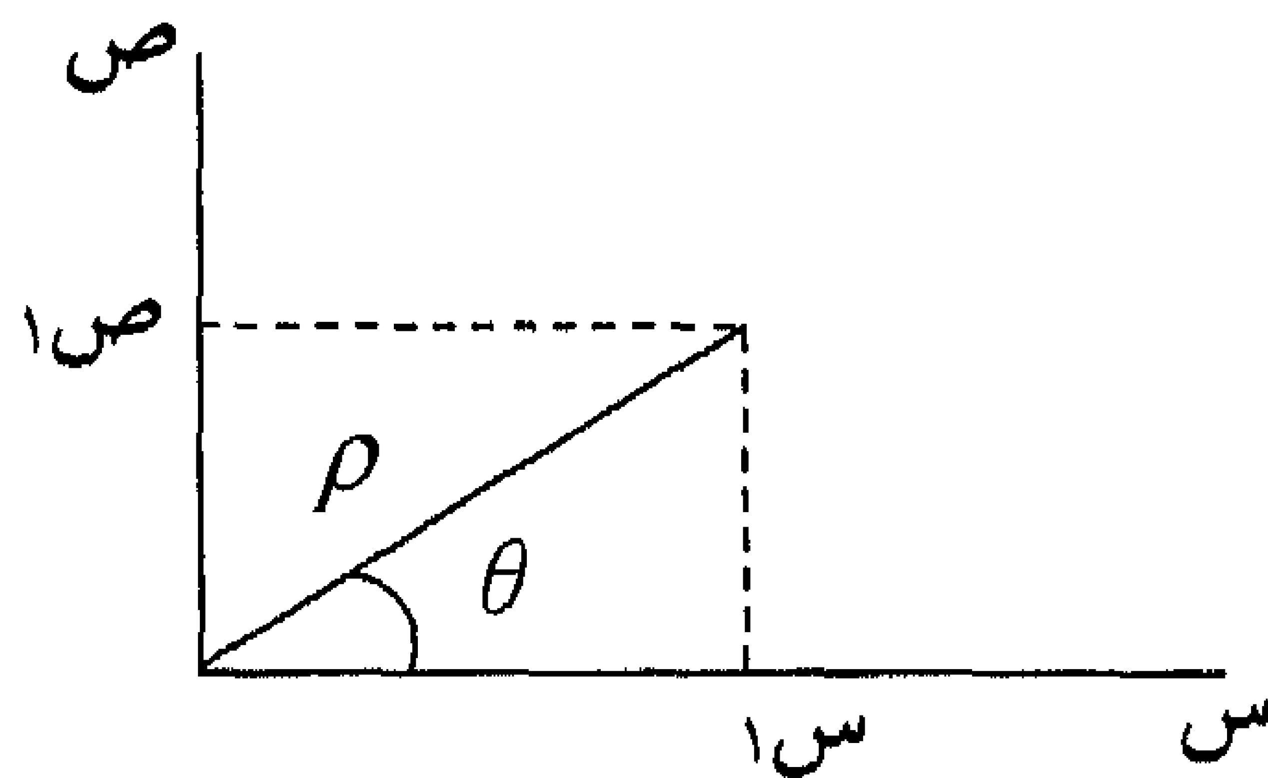
العدد العقدي ($س_١$، $ص_١$) يمكن تمثيله بنقطة في مستوٍ حيث يكون $س_١$ الأحداثي على محور س بينما $ص_١$ الإحداثي على المحور ص كما موضح في أدناه:







وفي الوقت نفسه فإن أية نقطة في هذا المستوى مرتبطة بعدد عقدي حيث يكون إحداثياتها على المحور س وعلى المحور ص هما الجزء الحقيقي والجزء الخيالي من العدد العقدي على التوالي ويمكن تمثيل العدد العقدي أيضاً باستخدام الإحداثيات القطبية بزوج مرتب $(\rho ، \theta)$ كما موضح في أدناه.



وأن أياً من الشكلين المرسومين في أعلاه يدعى مخطط (أركان) وواضح أن

$ص_١ = \rho$ جا θ

$س_١ = \rho$ جتا θ

$\rho = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$

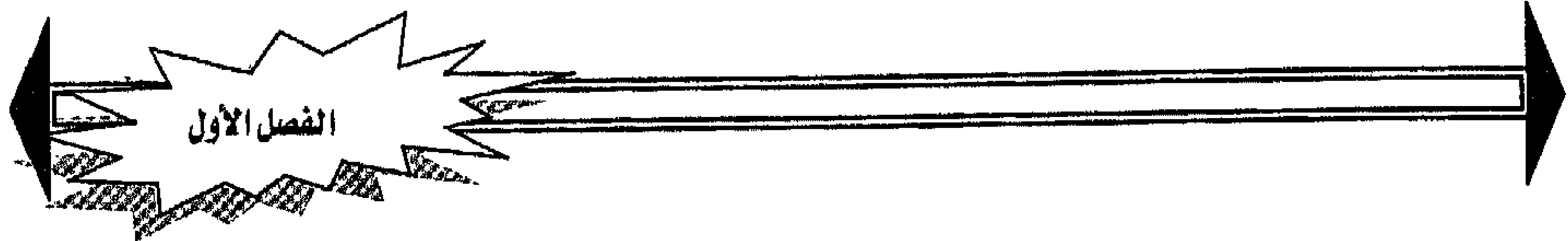
ومن هذا نستنتج أن ظا $\theta = \frac{ص_١}{س_١}$ وأن صفر $\leq \rho$

إضافة إلى ذلك فإن:

$س_١ + ت ص_١ = \rho$ جتا $\theta + \rho$ ت جا $\theta = \rho$ (جتا θ + ت جا θ)

ρ تمثل القيمة المطلقة للعدد العقدي $(\rho ، \theta)$ و θ تمثل زاويته، سنسمي ρ (جتا θ + ت جا θ) الصيغة القطبية للعدد العقدي $س_١ + ت ص_١$





بما أن قيمة الدوال المثلثة تكون متساوية للزاوية θ وللزاوية θ + ٢ ن π لكل الأعداد الصحيحة ن فأننا سنتعامل مع القيمة الأساسية إلى θ وهي عندما ن = صفر

مثال(٣٢): ليكن ع = ١ - ت جد القيمة المطلقة والمزاوية للعدد العقدي ع ثم جد صيغته القطبية

الحل: القيمة المطلقة إلى ع هي $\sqrt{2}$ لكون

$$\rho = \sqrt{س_1^2 + ص_1^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

أما بالنسبة للزاوية θ فإن

$$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{-1}{1} = -1 \leftarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$$

$$\text{لذا ع} = 1 - ت = (\text{جتا} \left(\frac{-\pi}{4}\right) + ت \text{ جا} \left(\frac{-\pi}{4}\right))$$

ملاحظة: قيمة θ تحسب من صيغة الأصلية

ρ (جتا θ + ت جا θ) لذلك عندما يكون ع = (جا ٣٠ + ت جتا ٣٠) فأن θ = ٦٠

وليس ٣٠ لكون

جا ٣٠ + ت جتا ٣٠ = جتا ٦٠ + ت جا ٦٠ ← θ = ٦٠

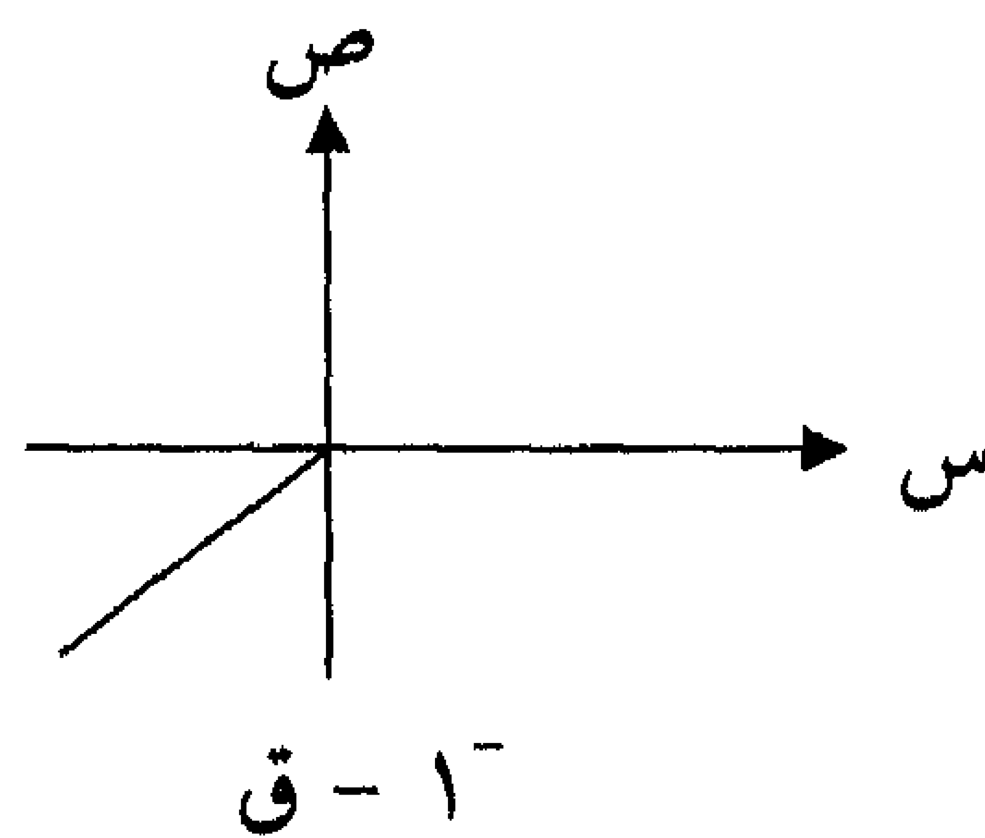
لذلك عندما ع = -٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) فإن قيمة θ هي ٢٤٠° لكون -٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = ٢ (جتا (٦٠ + ١٨٠) + ت (جا (٦٠ + ١٨٠) ← θ = ٢٤٠

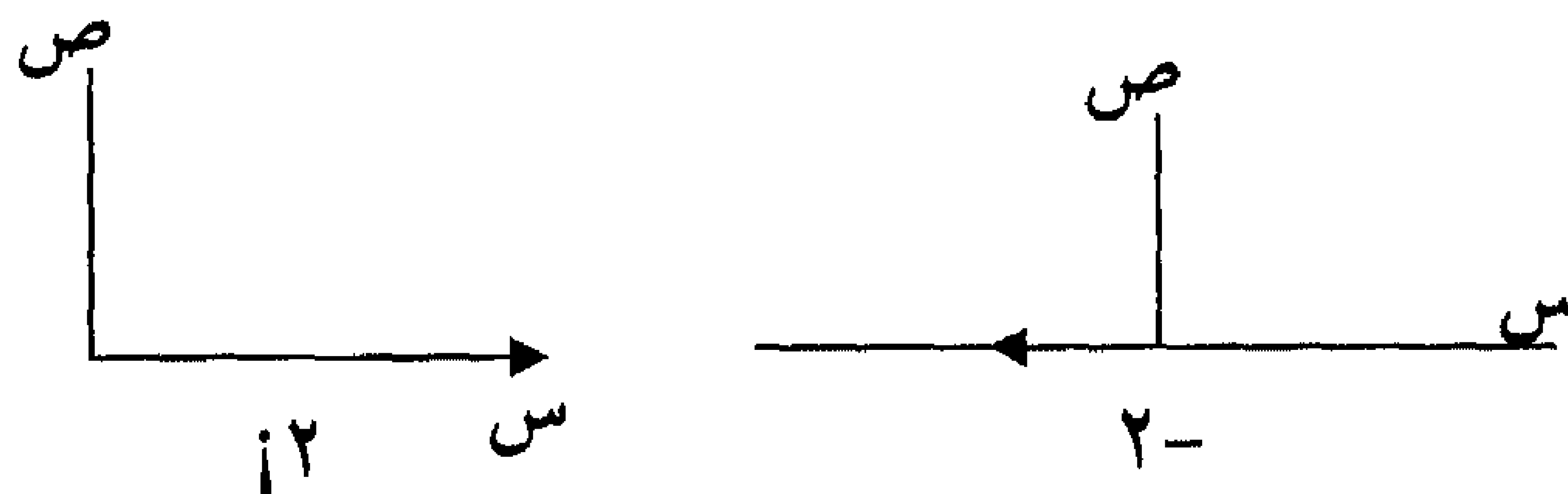


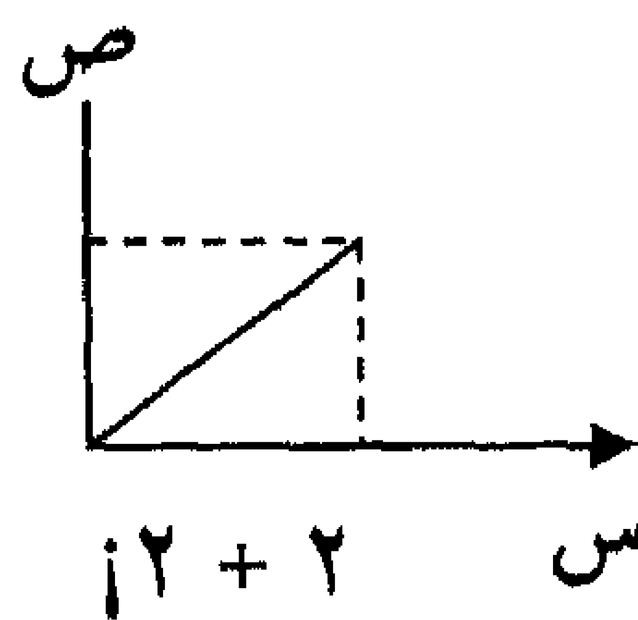
مثال (٣٣): ارسم مخطط أركان للأعداد العقدية التالية (مستخدماً المحاور الديكارتية)

$$٢ + ٢ ن ،\ -١ - ن ،\ -٢ ،\ ٢ ن ،\ \frac{١+ن}{١-ن} ،\ \frac{٢-٢ن}{ن}$$

الحل:





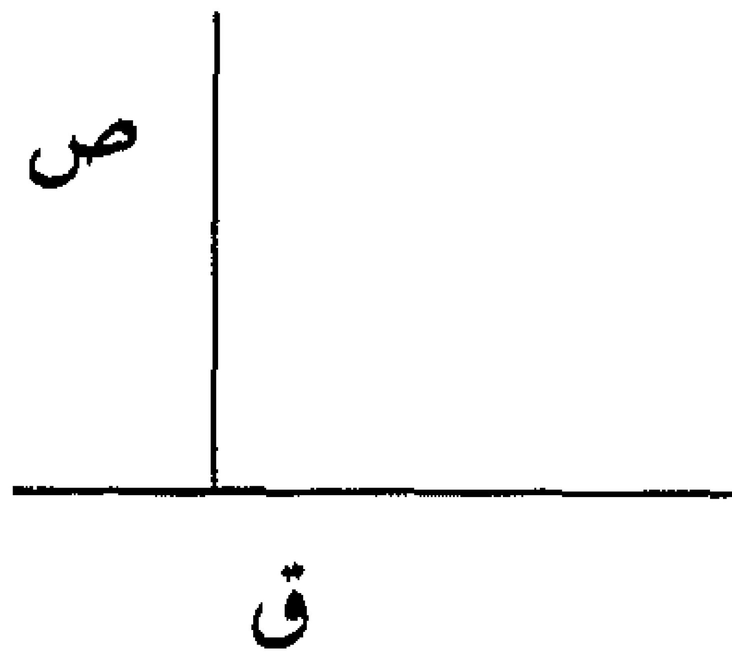


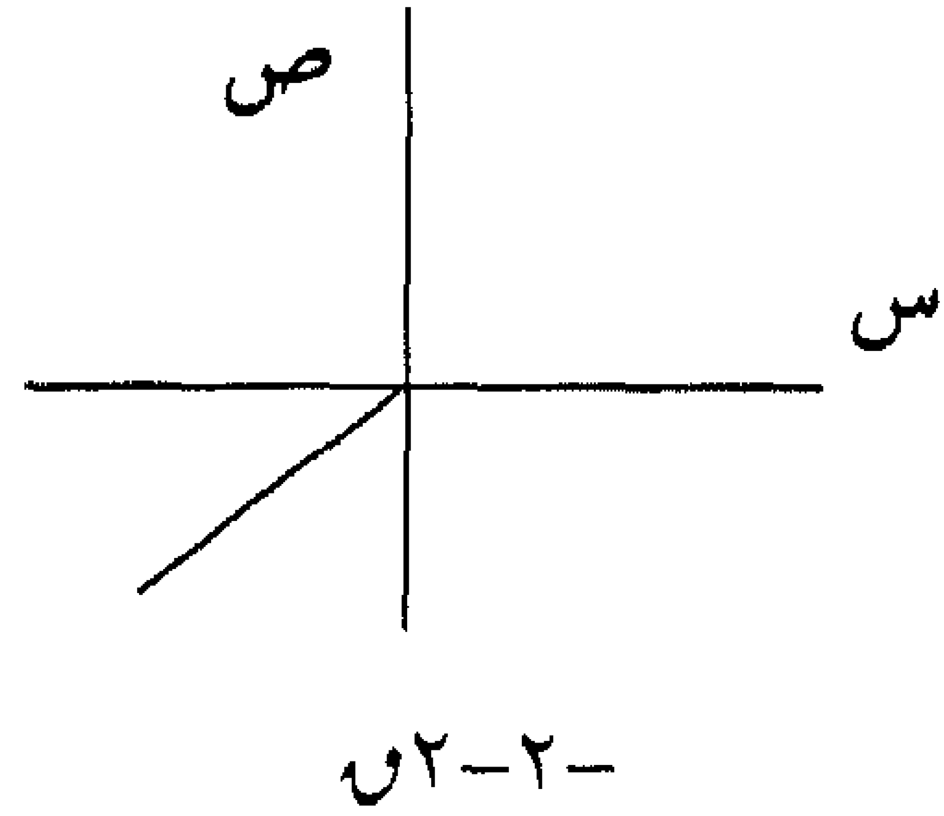
أما بالنسبة إلى $\frac{١+ن}{١-ن}$ و $\frac{٢-٢ن}{ن}$ فإننا نلاحظ أن

حيث ت ⟵ عدد عقدي

$$\frac{1+\text{ت}}{1-\text{ت}} = \frac{1+\text{ت}}{1-\text{ت}} \text{ ، } \frac{1+\text{ت}}{1+\text{ت}} = \frac{1+2\text{ت}+\text{ت}^2}{2} = \frac{2\text{ت}}{2} = \text{ت}$$

$$\frac{2-2\text{ت}}{\text{ت}} = \frac{2-2\text{ت}}{\text{ت}} = \frac{-\text{ت}}{-\text{ت}} = \frac{-2\text{ت}-2}{1} = -2-2\text{ت}$$ لذا فإن





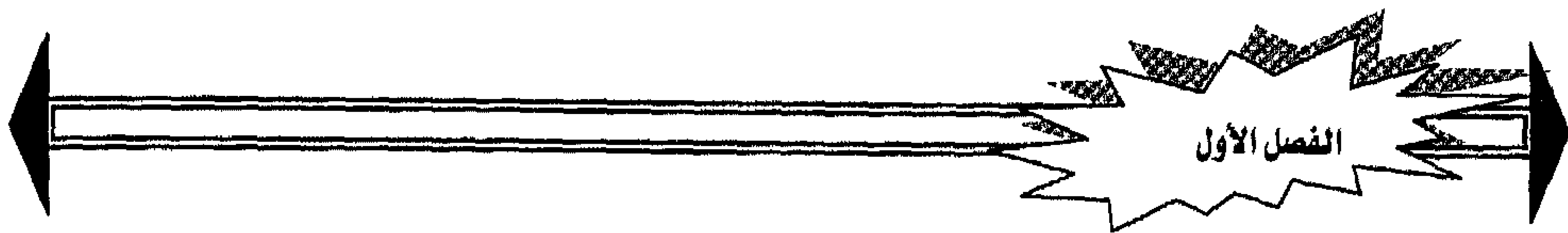
(١٠-٨-١) مبرهنة

أ) القيمة المطلقة لحاصل ضرب عددين عقديين هي حاصل ضرب قيمتيهما المطلقتين. أما زاوية حاصل ضرب عددين عقدين فهي مجموع زاويتيهما

ب) القيمة المطلقة لحاصل قسمة عددين عقديين في حاصل قسمة قيمتيهما المطلقتين. أما زاوية حاصل قسمة عددين عقديين فهي زاوية المقسوم مطروحاً منها زاوية المقسوم عليها.

البرهان: ليكن $\text{ع}_2 = \rho_2\,(\text{جتا}\,\theta_2 + \text{ت جا}\,\theta_2)$

$\text{ع}_1 = \rho_1\,(\text{جتا}\,\theta_1 + \text{ت جا}\,\theta_1)$



فإن:

ع١ع٢ = $\rho_1 \rho_2$ [(جتا θ_1 جتا θ_2 - جا θ_1 جا θ_2) + (جا θ_1 جا θ_2 + جتا θ_1 جا θ_1)]

= $\rho_1 \rho_2$ [جا (θ_1 + θ_2) + ت جا (θ_1 + θ_2)]

هذا يعني أن $\rho_1 \rho_2$ هي القيمة المطلقة للعدد العقدي ع١ع٢ وزاويته θ_1 + θ_2 بنفس الطريقة

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{\rho_1 (\text{جتا}\,\theta_1 + \text{ت جا}\,\theta_1)}{\rho_2 (\text{جتا}\,\theta_1 + \text{ت جا}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{\rho_1 (\text{جتا}\,\theta_1 + \text{ت جا}\,\theta_1)}{\rho_2 (\text{جتا}\,\theta_2 + \text{ت جا}\,\theta_2)} \cdot \frac{(\text{جتا}\,\theta_2 - \text{ت جا}\,\theta_2)}{(\text{جتا}\,\theta_2 - \text{ت جا}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\text{جتا}\,\theta_1\ \text{جتا}\,\theta_2) + \text{جا}\,\theta_1 \text{جا}\,\theta_2 + \text{ق}(\text{جا}\,\theta_1\ \text{جتا}\,\theta_2 - \text{جتا}\,\theta_1 \text{جا}\,\theta_2)}{\text{جتا}\,\theta_2^2 + \text{جا}\,\theta_2^2}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\ \text{جتا}\,(\theta_1 - \theta_2) + \text{ق جا}\,(\theta_1 - \theta_2))$$

وهذا يعني أن $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ هي القيمة المطلقة للعدد العقدي $\frac{ع_1}{ع_2}$ وزاويته θ_1+ θ_2

(١١-٨-١) مبرهنة دي حوافر

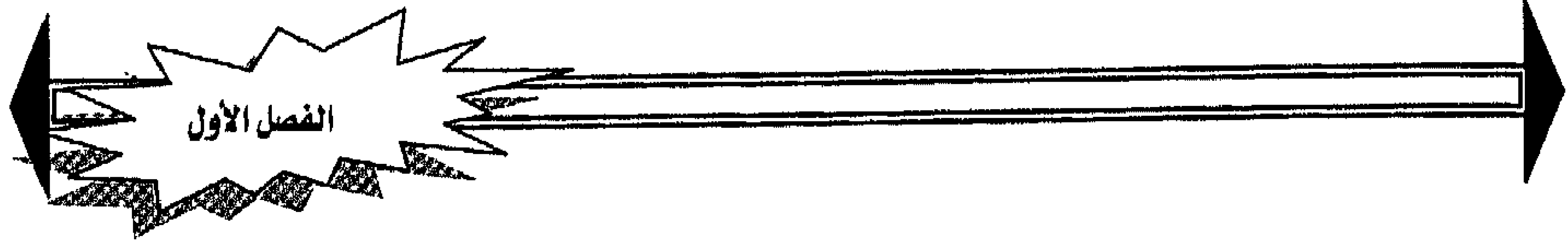
إذا كان ن عدداً طبيعياً فإن:

ع^{ن} = [ρ (جتا θ+ ت جا θ)]^{ن} = $\rho^{ن}$ (جتا$_{ن}$ θ+ ت جا$_{ن}$ θ)

البرهان:

باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي والمبرهنة السابقة بخصوص حاصل ضرب عددين عقدين، سنثبت المبرهنة أعلاه وكما يلي:





عندما ن = ١ فإن المساواة واضحة

نفرض أن المساواة تتحقق عندما ن = ك أي أن

$[\rho$ (جتا θ+ ت جا θ)$]^{ك}$ = $\rho^{ك}$ (جتاك θ+ ت جاك θ)

فإن:

$[\rho$ (جتا θ+ ت جا θ)$]^{ك+1}$ = $[\rho$(جتا θ+ ت جا θ)$]^{ك}$. $[\rho$ (جتا θ+ ت جا θ)$]$

= $\rho^{ك}$ (جتا ك θ+ ت جا ك θ) . ρ (جتا θ+ ت جا θ)

حسب فرضية الاستقراء

= $\rho^{ك+1}$ (جتا (ك θ+ θ) + ت جا (ك θ+ θ)

حسب المبرهنة السابقة

= $\rho^{ك+1}$ (جتا (ك + ١) θ + ت جا (ك +١) θ)

مثال (٣٤): ليكن ع = ١ + ت جد الصيغة القطبية لكل من ع، $ع^{2}$، $ع^{3}$، $ع^{ن}$

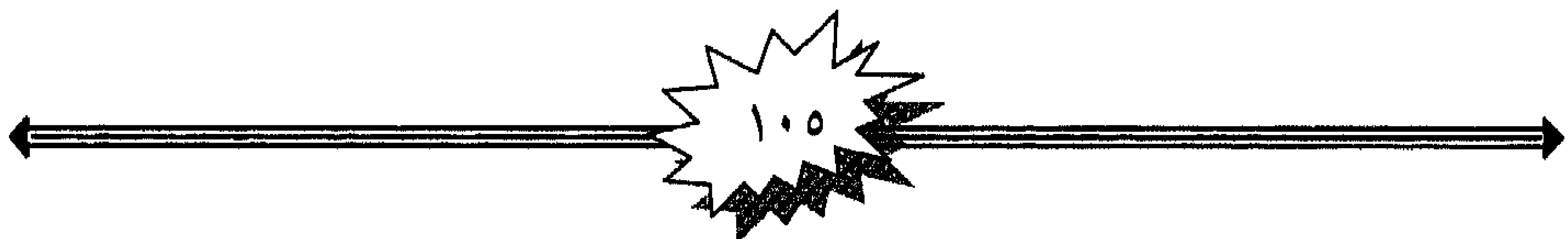
الحل:

$\rho = \sqrt{س^{2} + ص^{2}} = \rho = \sqrt{1^{2} + 1^{2}} = \sqrt{2}$

ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ← ظا θ = ١ ← $\theta = \frac{\pi}{4}$

فإن ع = ١ + ت = $\sqrt{2}$ (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$)

$ع^{3} = \left(\sqrt{2}\right)^{3}$ (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$)



$$\text{ع}^{٣} = \left(\sqrt{٢}\right)^{٣} \left(\text{جتا } ٣\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا } ٣\frac{\pi}{٤}\right)$$

$$\text{ع}^{\text{ن}} = \left(\sqrt{٢}\right)^{\text{ن}} \left(\text{جتا ن}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا ن}\frac{\pi}{٤}\right)$$

(١٢-٨-١) الجذور النونية للعدد العقدي

إذا كانت ن عدداً طبيعياً وكل من ﻡ و ع عـدداً عقـدياً فـإن حـل المعادلـة $\text{ع}^{\text{ن}} = \text{ﻡ}$ يعني إيجاد الجذور النونية للعدد العقدي ﻡ وكما مبين أدناه:

ليكن $\text{ﻡ} = \text{ر}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)$

$\text{ع} = \rho\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)$ فإن

فإن $\text{ع}^{\text{ن}} = \text{ﻡ} \leftarrow \rho^{\text{ن}} = (\text{جتا ن}\,\theta + \text{ت جا ن}\,\theta)$

$= \text{ر}\,(\text{جتا}\,\Phi + \text{ت جا}\,\Phi)$

$\leftarrow (\rho^{\text{ن}} = \text{ر})$ و $(\text{ن}\,\theta = \Phi + ٢\,\text{ك}\,\pi)$

$\leftarrow (\rho = \text{ر}^{\frac{١}{\text{ن}}})$ و $\theta = \frac{\phi}{\text{ن}} + \frac{٢\text{ك}\pi}{\text{ن}}$

بما أن لكل عدد صحيح ك يوجد عددان صحيحان م، ي بحيث أن:

ك = ي ن + م، $\text{ن} > \text{م} \geq$ صفر فإن

$$\Theta = \frac{\phi}{\text{ن}} + \left(\frac{(\text{ي ن} + \text{م})}{\text{ن}} ٢\pi\right) = \frac{\phi}{\text{ن}} + ٢\pi\,\text{ي} + ٢\pi\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{\phi}{\text{ن}} + ٢\pi\frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

لذا، هناك ن فقد من القيم المتمايزة إلى ع لكون $\text{ن} > \text{م} \geq$ صـفر أن قـيم ع المتمايزة هي الجذور النونية للعدد العقدي ﻡ وهي كما يلي

$ر^{\frac{1}{ن}}$ [جتا $(\frac{\phi}{ن}+\frac{٢\pi م}{ن})$ ت جا $(\frac{\phi}{ن}+\frac{٢\pi م}{ن})$

م = ٠، ١، ٢، ....، (ن – ١)

مثال (٣٥): جد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد ٨ ت أي جد ع^{٣} بحيث أن ع^{٣} = ٨ ت

الحل: بما أن $\rho=\sqrt{س^2+ص^2}=\sqrt{(٨)^2}=٨$

ص = ρ جا ϕ ← ٨ = ٨ جا Φ ← جا Φ = ١ ← $\Phi=\frac{\pi}{٢}$

فإن:

ع^{٣} = ٨ ق ← $\rho^{٣}$ (جتا ٣ Θ + ت جا ٣ Θ) = ٨ (جتا Θ + ت جا Θ)

← ($\rho^{٣}$= ٨) و ($٣\theta = \frac{\pi}{٢}+٢ك\pi$)

← (ρ= ٢) و ($\theta = \frac{\pi}{٦}+\frac{٢}{٣}ك\pi$)، ك = ٠، ١، ٢

وعليه فإن الجذور الثلاثة هي

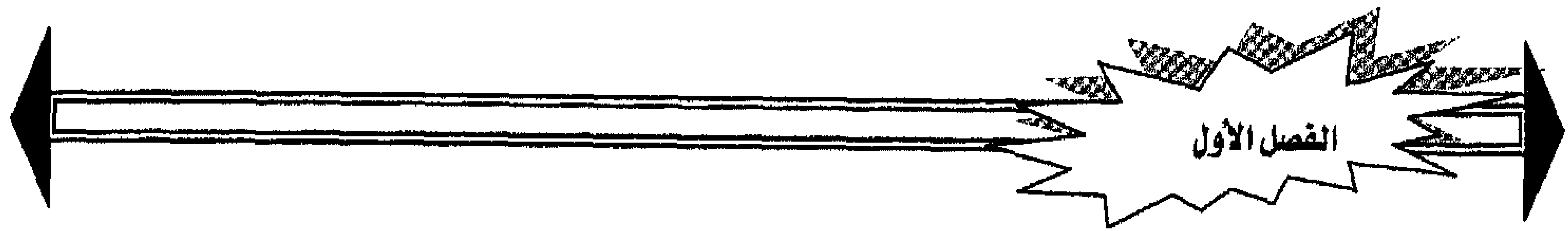
٢ (جتا$\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$) = $\sqrt{٣}$ + ت

٢ (جتا $(\frac{\pi}{٦}+\frac{٢\pi}{٣})$ + ت جا ($\frac{\pi}{٦}+\frac{٢\pi}{٣}$) $-\sqrt{٣}$ + ت

٢ (جتا $(\frac{\pi}{٦}+\frac{٤}{٣}\pi)$ + ت (جا $(\frac{\pi}{٦}+\frac{٤}{٣}\pi)$ = -٢ ت

مثال (٣٦): جد قيم ع^{١٠} بحيث أن ع^{٥} = ١

١ = (جتا٠ + ت جا٠)



لذا ع^{ن} = ١ ← $\rho^{ن}$ (جتا$_{ن}$ θ + ت جا$_{ن}$ θ) = ١ (جتا. + جا$_{ن}$ θ)

($\rho^{ن}$ = ١) و (ن θ = صفر + ٢ ك π)

(ρ = ١) و (θ = ٢ ك) ن = ١، ٢، ....، (ن − ١)

هذا يعني أن هناك ن من الجذور المتمايزة التي تحقق المعادلة ع^{ن} = ١ وهي

(جتا $\frac{٢ك\pi}{ن}$ + ت جا $\frac{٢ك\pi}{ن}$)، ك = ٠، ١، ٢، ....، (ن − ١)

هذه الجذور تسمى الجذور النونية للواحد

(١٣-٨-١) الجذور النونية البدائية للواحد

لقد بينا في المثال السابق أن هناك ن من الجذور التي تحقق المعادلة ع^{ن} = ١

إذا فرضنا ر = جتا $\frac{٢\pi}{ن}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{ن}$ فإن هذه الجذور هي

ر^{١}، ر^{ن}، .... ر^{ن} = ١ حسب مبرهنة دي موافر

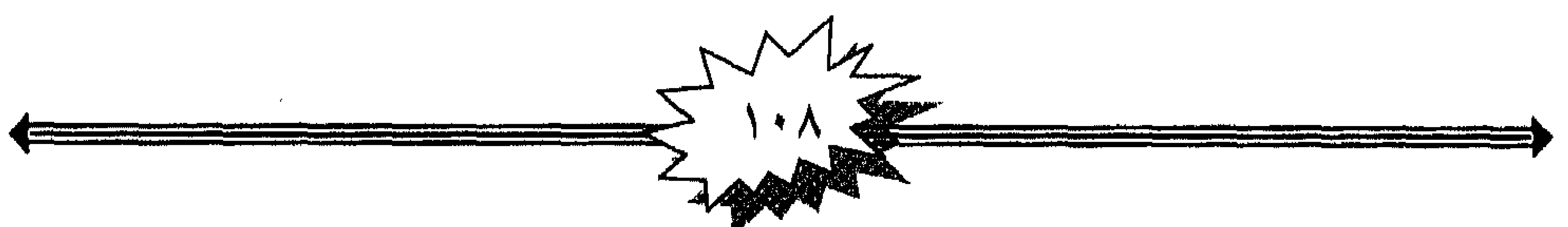
(١٤-٨-١) تعريف

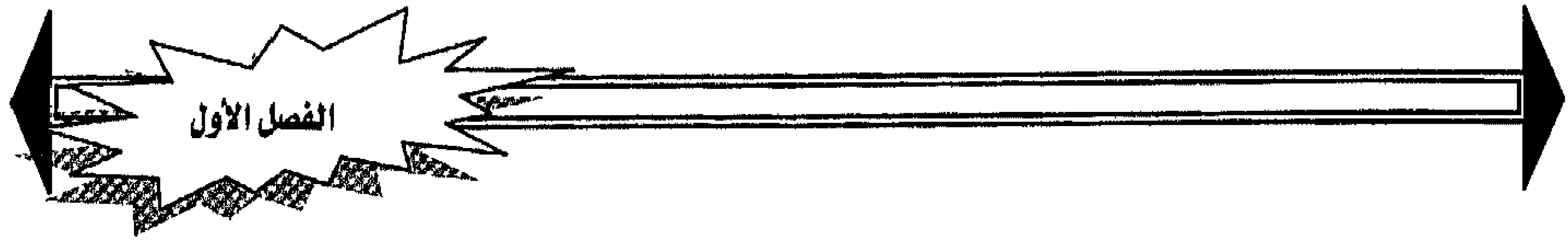
إذا كان ع^{ن} = ١ وع^{٣} ≠ ١ لكل ٣ < م < ٠ فإن ع يسمى جذراً نونياً بدائياً للعدد واحد

(١٥-٨-١) مبرهنة

إذا كان

(ك، ن) = د





$ر = \left(جتا \left(\frac{2\pi}{ن}\right) + ق\ جا \left(\frac{2\pi}{ن}\right) \right)$ فإن:

رك هو جذور بدائي للواحد من الصنف $\frac{ن}{د}$

البرهان:

بما أن (ك، ن) = د يوجد عددان صحيحان هما $ك_1$، $ن_1$ بحيث أن ك = $ك_1$ د و ٨ = $ن_1$ د وبالتالي ($ن_1$، $ك_1$) = ١ كما أن:

$$ر^ك = \left(جتا \left(\frac{2\pi ك}{ن}\right) + ق\ جا \left(\frac{2\pi ك}{ن}\right) \right)$$

$$= جتا \left(\frac{2\pi ك_1}{ن_1}\right) + ق جا \left(\frac{2\pi ك_1}{ن_1}\right)$$

وواضح أن $ر^ك$ جذر للواحد من الصنف $ن_1 = \frac{ن}{د}$ لكون

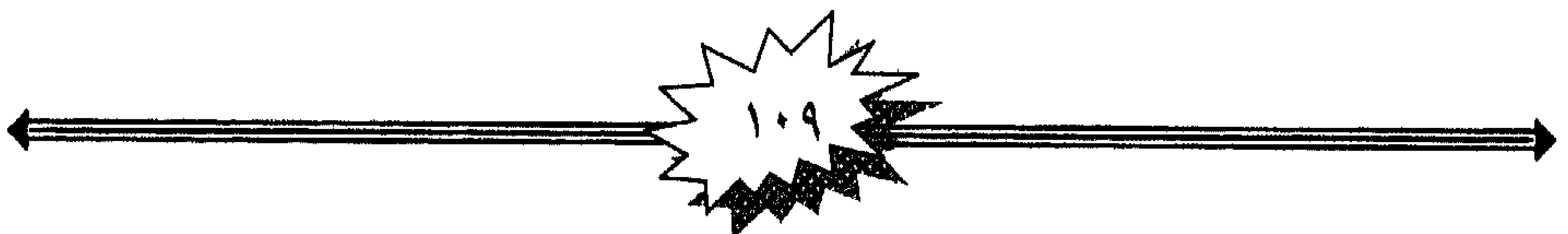
$(ر^ك)^{ن_1}$ = جتا (٢ π $ك_1$) + ق جا (٢ π $ك_1$) = ١

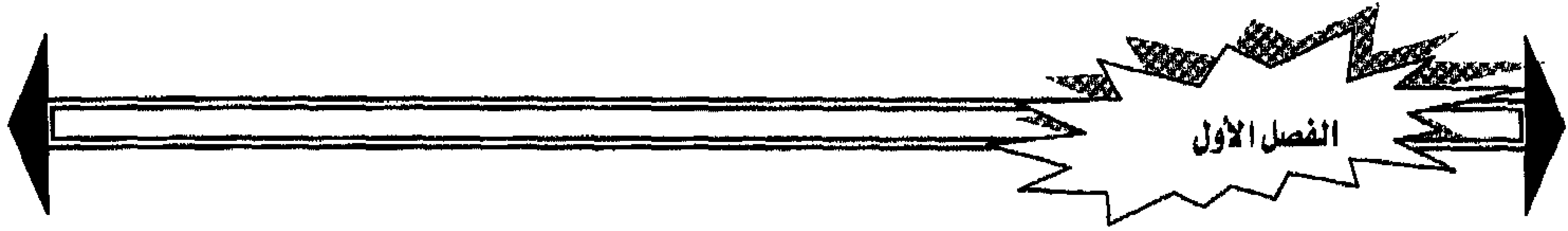
بقي أن نبرهن أن $ر^ك$ هو جذر بدائي للواحد من الصنف $ن_1 = \frac{ن}{د}$ وهنا نفرض العكس إذا هناك عدد صحيح م، $ن_1$ > م > صفر بحيث أن:

$$(ر^ك)^م = جتا \left(\frac{2\pi ك_1 م}{ن_1}\right) + ق جا \left(\frac{2\pi ك_1 م}{ن_1}\right)$$

ولكن هذا يعني أن $\frac{ك_1 م}{ن_1}$ يجب أن يكون عدداً صحيحاً وبالتالي فإن:

$ن_1$/ $ك_1$ م





بما أن ($ن_١$، $ك_١$) = ١ فإن $ن_١$/ م وهذا غير ممكن لكون $ن_١$ > م > صفر

(١٦-٨-١) نتيجة :

الجذور النونية للواحد ر، $ر^٢$، $ر^٣$، .....، $ر^ن$ هي وحدها الجذور البدائية التي يكون كل واحد فيها مرفوعاً إلى القوة $م_ك$ بحيث أن ($م_ك$، ن) = ١

من المبرهنة السابقة $ر^ك$ جذر نوني بدائي للواحد إذا وفقط إذا كان د = ١

(١٧-٨-١) نتيجة :

إذا كان خـ جذراً نونياً بدائياً للواحد وكان (ك، ن) = د فإن $خـ^ك$ جذر بدائي للواحد من الصنف $\frac{ن}{د}$

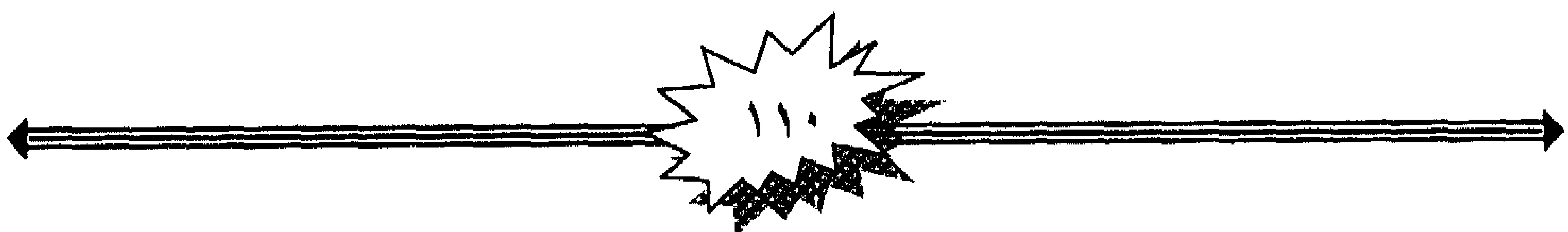
(١٨-٨-١) نتيجة :

تتضمن الجذور النونية للواحد كل الجذور الميمية للواحد إذا وفقط إذا كان م/ ن

البرهان:

إذا كان م | ن فإن هناك عدداً صحيحاً وليكن ك بحيث أن ن = م ك إذن ينتج باستخدام المبرهنة السابقة أن $ر^ك$ هو الجذر الميمي البدائي للواحد وهذا يعني أن كل الجذور الميمية للواحد موجودة خلال الجذور النونية والآن إذا كان كل الجذور الميمية للواحد موجودة ضمن الجذور النونية فإن الجذر الميمي البدائي

$$جتا \left(\frac{٢\pi}{م}\right) + ق\ جا \left(\frac{٢\pi}{م}\right) = ر^{خـ}$$



باستخدام المبرهنة (١٥-٨-١) إذا كان د = (ذ، ن) فإن $ر^{ذ}$ سيكون جذراً نونياً بدائياً للواحد

وإذا م = $\frac{ن}{د}$ أي م د = ن

تمارين (٨-١)

١) أكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل س + ى ص

$ى^{١٠}$، $ى^{٤}$، $ى^{٣}$، $\left(\frac{٢+٣ق}{١+٤ق}\right)$، $\frac{١}{١+ق}$

٢) بين أن ن = ١، − ١، ى، − ى تبعاً إلى قيم ن كونها متطابقة مع ٠، ١، ٢، ٣ على التوالي بالنسبة إلى ٤

٣) جد القيمة المطلقة والزاوية لكل من الأعداد العقدية التالية:

٣ (جا ٢٠ + ى جتا ٢٠)

٣ (جا ٢٠ + ى جا ٢٠)

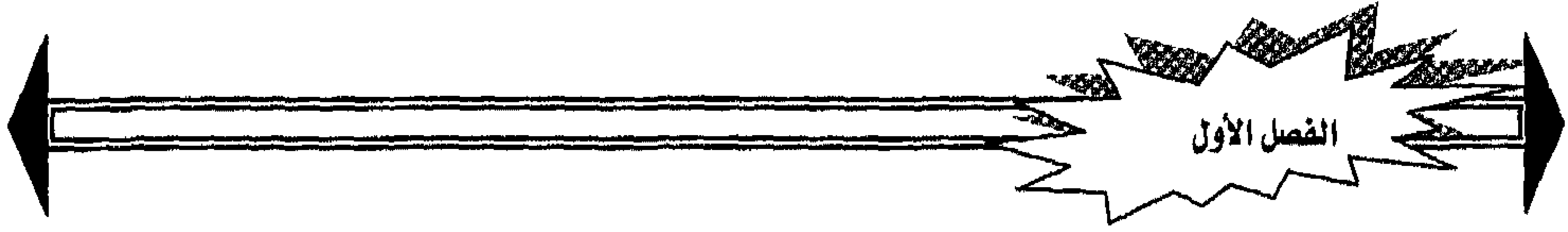
-٣ (جتا ٢٠ + ى جا ٢٠)

٣ (جتا ٣٠ + ى جا ٣٠)

٤) جد الصيغة القطبية لكل من الأعداد العقدية الواردة في تمرين ١

٥) أكتب $\frac{١}{\propto(\text{جتا}\,\theta + ى\,\text{جا}\,\theta)}$ بالصيغة القطبية

٦) ماذا سيكون التمثيل الهندسي للعدد العقدي في حالة ثبوت القيمة المطلقة وتغير الزاوية أو في حالة ثبوت الزاوية وتغير القيمة المطلقة



٧) مثل الأعداد العقدية التالية بالصيغة القطبية

$أب ، \frac{أ}{ب} ، \frac{أ^{٢}}{ب} ، \frac{١}{أ}$

حيث أن $ب = ٤ \,(جتا\ ٥٠ + ت\ جا\ ٥٠)$

$أ = ٢\,(جتا\ ٣٠ + ت\ جا\ ٣٠)$

$ج = -\sqrt{٣} + ت$

٨) أكتب $ب = -\sqrt{٣} - ت$

$أ = \sqrt{٣} - ت$

بالصيغة القطبية ثم جد القيمة المطلقة والزاوية لكل من $أ^{٣}$, $\frac{ب^{٢}}{أ\,ج}$

٩) جد الجذور لكل من المعادلات التالية

$ع^{٣} = ٨$

$ع^{٣} = ١$

$ع^{٦} = ١$

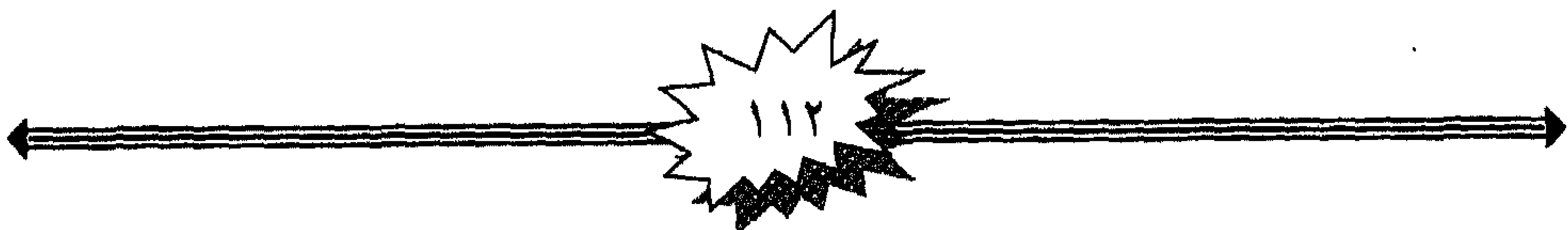
$ع^{٢} = \frac{١+ق}{\sqrt{٢}}$

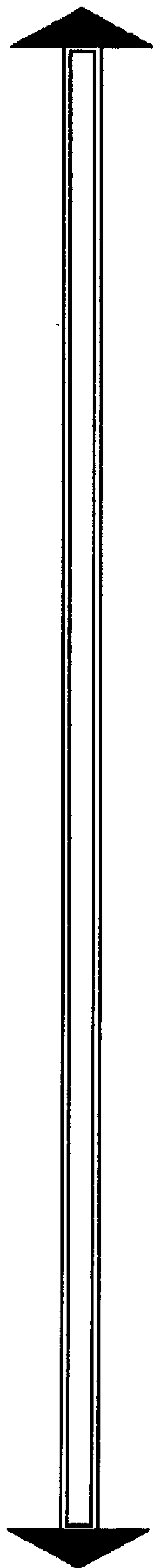
$ع^{٤} = -١٦ق$

١٠) جد الجذر البدائي الثامن للواحد

١١) جد الجذر البدائي الخامس للواحد

٣) كم جذراً حقيقياً للواحد من الصنف ن؟

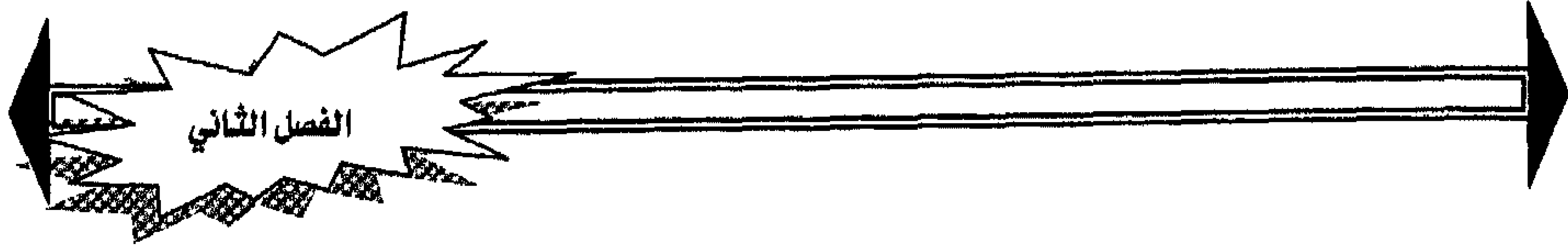






الفصل الثاني

المنطق الرياضي



الفصل الثاني

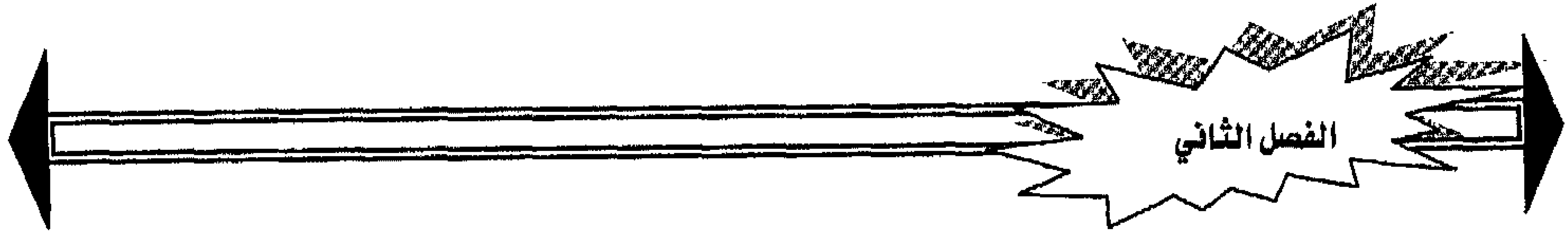
المنطق الرياضي

مقدمة:

من المعروف أن الرياضيات تعتمد على التفكير المنطقي للوصول إلى نتيجة محددة ومقبولة وواضحة لا لبس فيها ولا تقبل التأويل ويبدأ هذا بفحص المعطيات وتوظيفها للوصول إلى المطلوب من خلال سلسلة من الأفكار والاستنتاجات الفرعية المنطقية المتماسكة غير المتناقضة إلى أن نصل إلى النتيجة النهائية المطلوبة.

ومن أجل ذلك اتفق الرياضيون على وضع أسس ومضمون علم المنطق الرياضي حتى يتمكنوا من الوصول إلى النتائج المقبولة بطريقة ميسرة وواضحة ومختصرة ولذلك كان لابد أن يعتمد هذا العلم على أسس قوية وثابتة تفرض وجودها على التفكير الذي لا يقبل سواها وتلك الأسس تسمى مبادئ المنطق، كما كان لابد أن يتضمن هذا العلم أدوات تعين الرياضيين على ربط المفاهيم والجمل الرياضية بعضها البعض لتكوين مفهوم مركب على أن يكون لكل أداة من تلك الأدوات المعنى المحدد الواضح وأخيراً كان لابد من وجود رموز تستعمل كلغة رياضية لكتابة المفاهيم والجمل الرياضية بطريقة مبسطة ومختصرة على أن يعطي لكل رمز المعنى المحدد له.

يتضح لنا مما تقدم مدى حاجة طالب الرياضيات للتعرف على علم المنطق الرياضي وذلك لاستعانة به كلغة لكتابة الرياضيات، خاصة حديثه وذلك



بطريقة مختصرة وواضحة وصحيحة. لهذا فإننا سنعرض خلال هذا الباب أسس علم المنطق الرياضي وأدواته بطريقة موجزة ومركزة.

(١-١) التقدير:

انتهينا إلى أن علم المنطق الرياضي هو بمثابة لغة للرياضيين حيث يمكنهم بواسطتها تكوين الجمل الرياضية والتي منها هو ما هو إنشائي ومنها ما هو جنري يقدم مفهوماً معيناً للسامع وهذا المفهوم قد نقبله ونسلم به "نصدقه" وقد نرفضه "نكذبه" وسوف نهتم بدراسة النوع الثاني - أي الجمل الجنرية - والذي يسمى تقريراً وهو تلك العبارات التي تقدم مفهوماً يحتمل إما الصدق وإما الكذب.

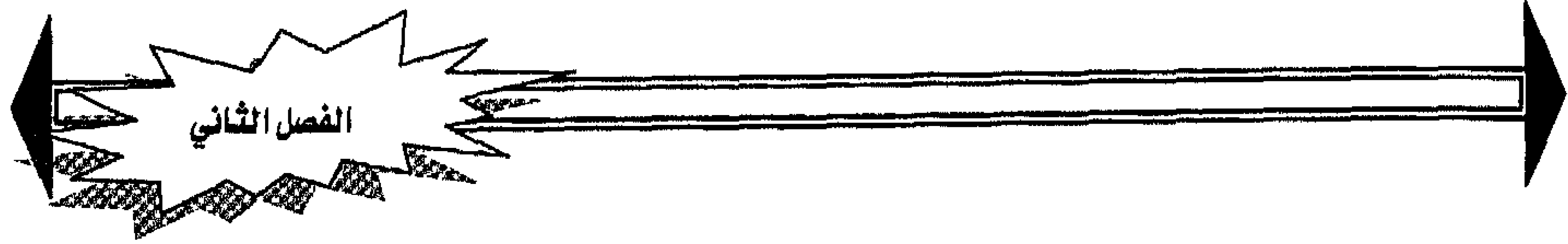
مثال (١-١-١):

القول بأن للمعادلة $س^{٤} = ١$ جذران فقط "تقرير" كاذب حيث لا يتفق مع النظرية الأساسية للجبر والتي تجعل $س^{٤} = ١$ للمعادلة أربعة جذور.

مثال (١-١-٢):

القول بأن "جذري" المعادلة $س^{٢} - ٨ س + ١٥ =$ صفر هما العددان ٣ ، ٥ .. تقرير صادق لا شك أن الحكم على تقرير ما بالصدق أو بالكذب يعتمد على المبادئ والأسس التي أتفق عليها من لهم علاقة بهذا التقرير فلو قلنا مثلاً "مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠" فإننا أمام تقرير في الهندسة المستوية وفي نظر المتمسكين فقط بالهندسة الإقليدية وقد يكون التقرير ذاته كاذباً في هندسة أخرى





مثل الهندسة الكدية وفي نظر غير المتمسكين بالهندسة الإقليدية، متفقين على أن المنطق الرياضي هو لغة رياضية يستعملها الرياضيون في تحليل المفاهيم والمبادئ الرياضية وكذلك في تفسير الطرق التي توظف للوصول إلى الحقيقة والتماس الشروط التي تجعل تقريراً ما صادقاً في إطار المبادئ المتفق عليها.

تستخدم الحروف الكبيرة أ, ب, جـ لتدل على تقارير كما يدل الحرف ت أو العدد ١ على قيمة الصدق لتقرير صادق منطقياً ويدل الحرف ف أو العدد صفر على قيمة الصدق لتقرير غير صادق منطقياً وفي دراستنا هذه فسوف نستعمل العددين ١ و صفر ليدلا على قيمتي الصدق لتقرير صادق منطقياً وتقرير كاذب منطقياً على الترتيب.

تعريف (١-١-١):

التقرير البسيط هو مفهوم رياضي في صورة جملة خبرية لا يمكن تجزئتها إلى جملتين خبريتين مفيدتين.

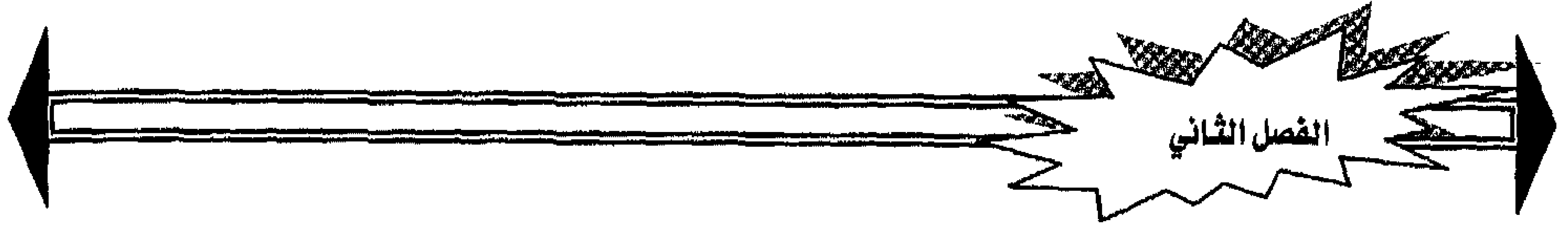
تعريف (١-١-٢):

التقريب المركب هو مجموعة من التقارير البسيطة المرتبطة ببعضها البعض بواسطة بعض أدوات الربط مثل "أو" , "و", مع أن "، إذا وفقط إذا".

مثال (١-١-٣):

القول بأن "١٥ عدد فردي وغير أولي" هو تقرير مركب من تقريرين بسيطين، الأول هو١٥عدد فردي والثاني هو ١٥عدد غير أولي" وتم الربط بينهما بالأداة "و" وهو كما سنرى أن قيمة الصدق للتقرير المركب سوف تحدد تماماً من





خلال قيم الصدق للتقارير البسيطة المكونة له مع الأخذ في الاعتبار طبيعة كل أداة من أدوات الربط المستخدمة في التقرير المركب.

(١-٢) مبادئ المنطق:

١. مبدأ الذاتية:

مبدأ الذاتية هو الذي يحكم الفكر على أساسه أن الشيء المحدد يبقى جوهر بذاته مهما تنوع سياق عرضه ويعبرون عن هذا المبدأ تعبيراً رمزياً بالقول: (م هو م).

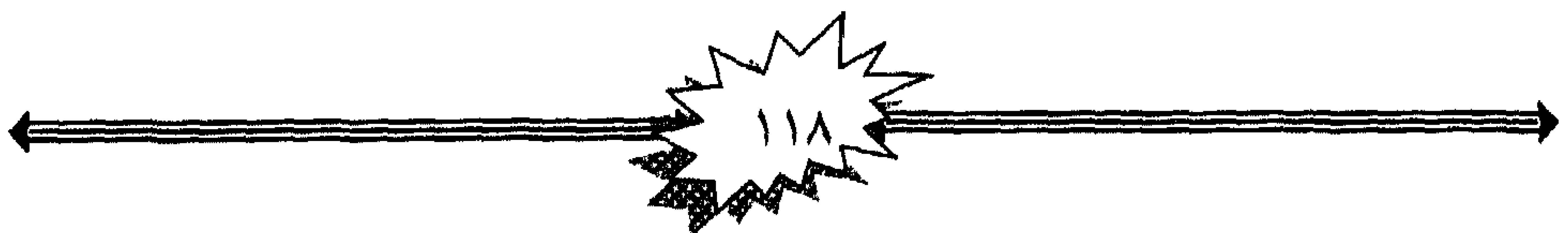
٢. مبدأ عدم التناقص:

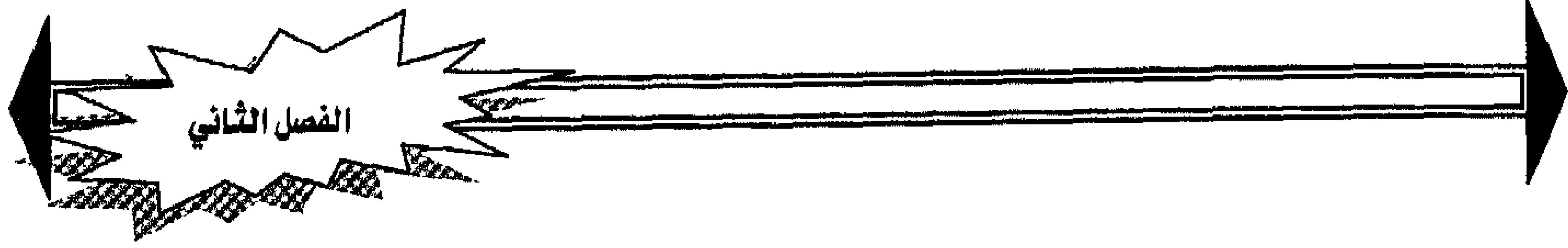
وهو الذي يحكم الفكر على أساسه بعدم وصف الشيء بصفه ما مع نفيها عن الشيء ذاته في آن واحد. ويعبرون عن قانون عدم التناقص تعبيراً رمزياً بالقول: (لا يكون م ونفي م في آن واحد) وللاختصار يقال (لا يكون م و ~م في آن واحد) حيث الرمز ~م هو نفي م.

٣. مبدأ الأول وإلا فالثاني:

مبدأ الأول وإلا فالثاني هو الذي يحكم الفكر على أساسة بأن يوصف الشيء أما بصفه وإما بنقضها. ويعبرون على هذا المبدأ رمزياً بالقول:

(م أو م~) حيث أو هنا تعني التخيير وهذا يعني الأول وإلا فالثاني.





مثال (١-٢-١):

القول بأن "العدد الصحيح ن إما زوجي وإلا هو فردي" حيث لا يوجد وصف ثالث للعدد ن من حيث قابلية القسمة على (٢).

(١-٣) جَبر المقادير:

إن وجهة جبر التقارير تتركز في تكوين التقارير المركبة ثم تطبق الأسس والمبادئ المنطقية على هذه التقارير لاستنتاج قيمة الصدق لها اعتماداً على قيم الصدق للتقارير البسيطة المكونة لكل تقرير مركب، وذلك مع الأخذ في الاعتبار طبيعة كل أداة من أدوات الربط المستخدمة في ربط التقارير البسيطة لتكوين التقرير المركب، لذلك وجب التأكيد على ضرورة تحديد طبيعة كل أداة من أدوات الربط كما لا يقبل أن تستخدم الأداة في أكثر من معنى خاصة في الرياضيات على ذلك اتفق الرياضيون على تحديد معنى وحيد لا بأس فيه وعلى غموض لكل أداة ربط، وقبل التعرف على بعض أدوات الربط والتي تسمى ب دال الصدق سوف نعرض الاحتمالات الممكنة لقيام الصدق المناظرة للتقارير البسيطة التي تكون تقريرين مركبين الأول يتكون من تقريرين بسيطين أ، ب والثاني يتكون من ثلاثة تقارير بسيطة أ، ب، ج وذلك من خلال الجدولين الآتيين:

م	ب
١	١
١	صفر
صفر	١
صفر	صفر

أ	ب	ج
١	١	١
١	١	صفر
١	صفر	١
صفر	١	١



جدول (١)

١	صفر	صفر
صفر	١	صفر
صفر	صفر	١
صفر	صفر	صفر

جدول (٢)

(١-٤) دوال الصدق (أدوات الربط): Truth Functions

(١) داله النفي: Negation function

دالة النفي هي أبسط دوال الصدق ومضمونها هو (إذا كان م تقريراً فإن نفيه يرمز له بالرمز ~م) ومن الواضح أن التقريرين ~م، م مختلفان في القيم وهذا يتفق مع قانون عدم التناقض جدول (٣) يتضمن قيم الصدق للتقريرين ~م، م ويسمى جدول الصدق لدلالة النفي.

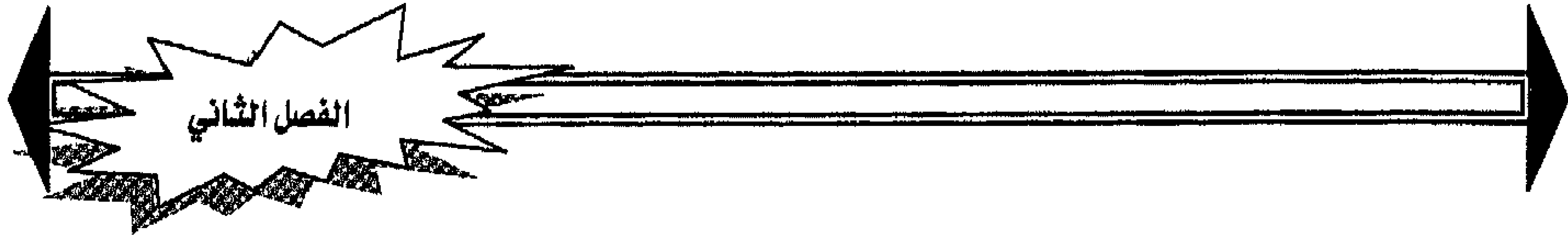
م	~م
١	صفر
صفر	١
جدول (٣)	

مثال (١-٤-١):

أوجد قيمتي الصدق للتقريرين الآتيين:

(هـ). لا تحاط الجزيرة بالمياه.

(هـهـ). ٦ > ١٠



الحل:

(هـ). هذا التقرير هو النفي لتقرير (الجزيرة تحاط بالمياه) وهو تقرير صادق لـه قيمة الصدق ١، إذن قيمة الصدق للتقرير (لا تحاط الجزيرة بالمياه) تساوي صفر.

(هـ هـ). هذا التقرير هو نفي التقرير (٦ ≤ ١٠) الذي له قيمة الصدق صـفر وعلى ذلك فإن قيمة الصدق للتقرير (٦ > ١٠) تساوي ١.

٢) دالة الوصل: Conjunction Function

إذا ارتبط التقرير أن ⍳ و ب بأداة الرباطـة (و) فإننـا نحـصل علـى تقريـر مركب يقرأ ⍳ و ب ويرمز له بـالرمز ⍳ ب ويأخـذ قيمـة الـصدق (١) في حالـة واحدة فقط وهي عندما تكون قيمة الصدق لكل من التقريـرين ⍳، ب تـساوي (١) دون ذلك يأخذ قيمة الصدق صفر انظر إلى جدول (٤)

⍳	ب	⍳ ∧ ب
١	١	١
١	صفر	صفر
صفر	١	صفر
صفر	صفر	صفر

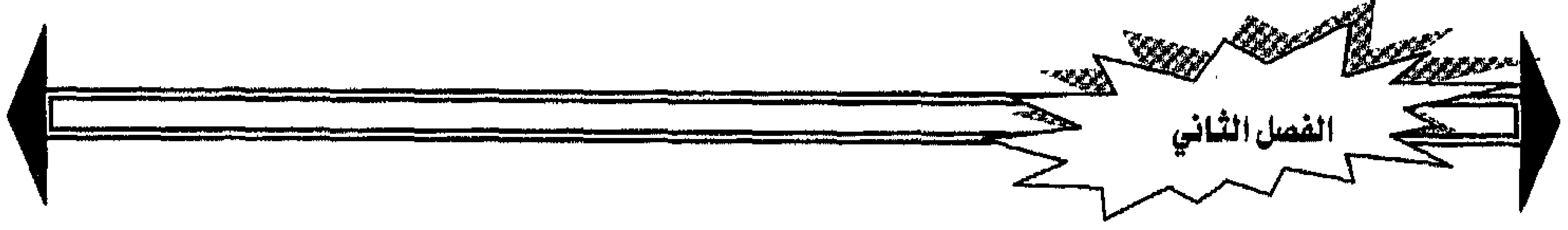
جدول (٤)

مثال (١-٤-٢):

أوجد قيمتي الصدق للتقريرين المركبين الآتيين:

(أ). ١٨ ÷ ٣ ≠ ٦ والقاهرة من المدن الكبرى.





(ب). المسلم يحب المدينة المنورة و س + ص = ٣ معادلة خط مستقيم.

الحل:

أ- نفرض أن أ هو التقرير "١٨ ÷ ٣ ≠ ٦" وبالطبع قيمة الصدق له تساوي صفر لأنه نفى التقرير الصادق منطقياً "١٨ ÷ ٣ = ٦" وبفرض أن ب هو التقرير "القاهرة" من المدن الكبرى، فهو بالطبع تقرير صادق منطقياً يأخذ قيمة الصدق (١) لأن القاهرة بالفعل من المدن الكبرى. على ذلك نجد أن قيمة الصدق للتقرير المركب أ ب هي صفر أي أن قيمة للتقدير المركب (أ) تساوي صفر.

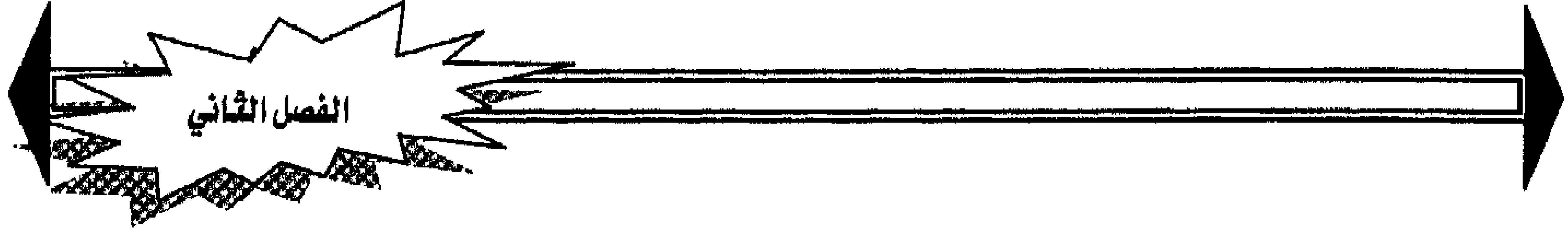
ب- نفرض أن جـ هو التقرير "المسلم يحب المدينة المنورة" وهو بالطبع تقرير صادق لأنها مدينة الرسول صلى الله عليه وسلم ومعشوقة المسلمين وبالتالي فإن قيمة الصدق لهذا التقرير تساوي "١" وبفرض أن "د" هو التقرير س + ص = ٣.. هي معادلة خط مستقيم فهو تقرير صادق وله قيمة الصدق وله قيمة الصدق ١ وعلى ذلك فإن قيمة الصدق للتقرير ب = ١

٣) دالة الفصل: (Disjunction Functions)

مقدمة:

قد نستخدم في حياتنا اليومية حرف (أو) بمعنى التخيير أي: أما ما قبل الحرف "أو" وإلا فالذي بعد حرف "أو" في الجملة التي ترتبط بواسطة حرف (أو) ولا يجوز الجمع بين الاثنين معاً ومثال على ذلك "عليك بالوقوف أو الجلوس". فلا يمكن الجمع بين الوضعين في نفس الوقت ولكن إما أن تقف وإلا تجلس. إلا





أن حرف "أو" والذي يسمى حرف الفصل هو الذي يقيناً في دراستنا هذه وله معنى واستعمال يتضحان في المثال التالي:

مثال (١-٤-٣):

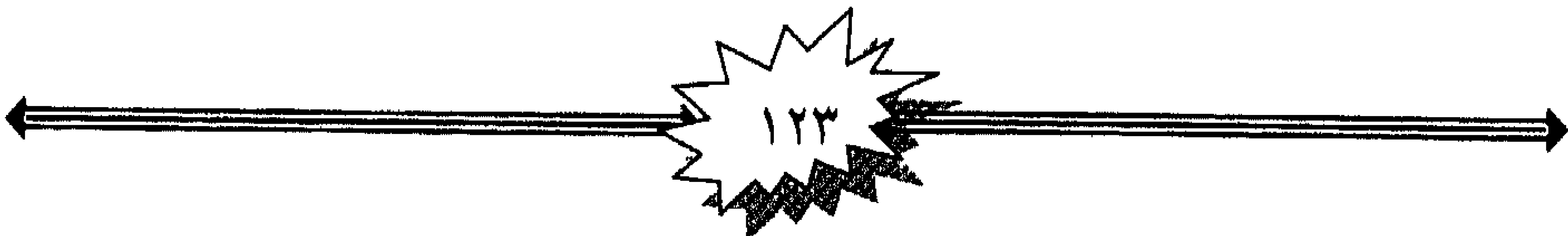
التقرير المركب "سوف" أقابل أحمد أو محمود" له قيمة الصدق ١ في الحالات الثلاث التالية:

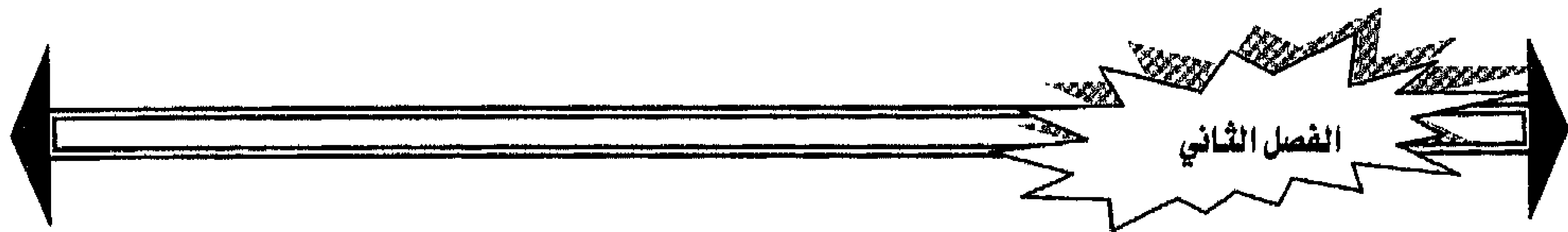
بالفعل حدث أن قابلت أحمد ولم أقابل محموداً.

بالفعل حدث أن قابلت محمود ولم أقابل أحمد.

بالفعل حدث أن قابلت أحمد وقابلت محموداً ويأخذ قيمة الصدق صفر في حالة واحدة عندما لا أقبل كلا من أحمد ومحمود. حرف الفصل أو هذا المعنى يسمى الإباحة، أي: يبيح حدوث ما قبله وما بعده في الجملة في نفس الوقت وهذا هو المعنى المعمول به والمتفق عليه بين الرياضيين.

على ما تقدم نقول إذا ارتبط التقرير أن م، ب بواسطة دال الفصل (أو) نحصل على تقرير مركب سنوفر له بالرمز م ∪ ب ويقرأ = م أو ب ويأخذ قيمة الصدق (١) إذا كانت قيمة الصدق ١ إذا كانت قيمة الصدق لتقرير واحد على الأقل من التقريرين م، ب تساوي ١ ويأخذ قيمة الصدق صفر إذا كانت قيمة الصدق لكل من التقريرين م، ب صفر ويمكن تعميم ذلك على تقرير مركب من أكثر من تقريرين بسيطين حيث يأخذ التقرير المركب قيمة الصدق (١) إذا كان أحد التقارير البسيطة المكونة له يأخذ قيمة الصدق (١) كما يأخذ التقرير المركب قيمة الصدق صفر إذا كانت قيم الصدق لكل التقارير البسيطة





أصفار نستطيع الآن أن نكون جدول الصدق لتقرير المركب م U ب كما هو مبين بجدول (٥) على النحو الآتي:

م	ب	م U ب
١	١	١
١	صفر	١
صفر	١	١
صفر	صفر	صفر

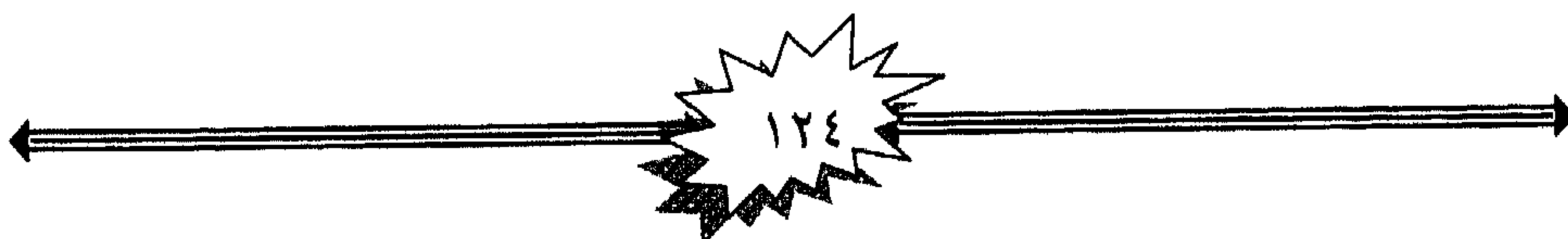
جدول (٥)

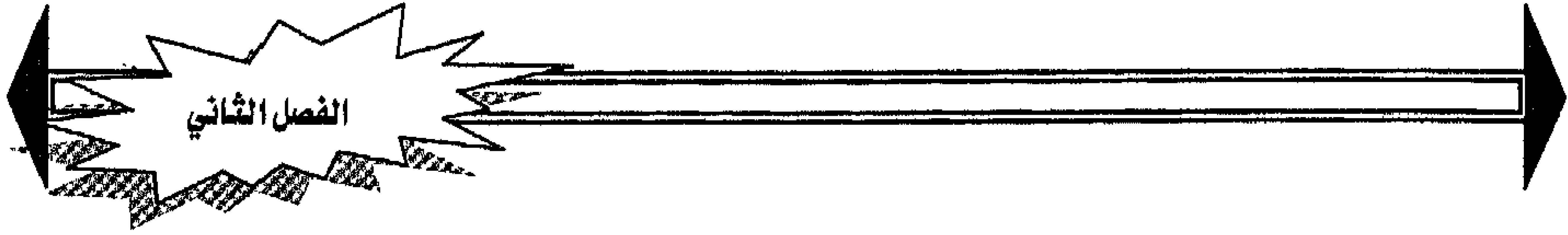
٤) دالة الإلزام الشرطية Conational Function

إن دالة الإلزام الشرطية والتي تسمى أحياناً دالة الاقتضاء هي بمعنى (إذا كان م فإن ب) أو بمعنى أوضح (تحقيق م يقتضي تحقيق ب) فإذا ارتبط التقرير أن م - ب بواسطة دالة الاقتضاء فإننا نحصل على تقرير مركب يرمز له بالرمز م ← ب ويقرأ: م يؤدي إلى ب ويتضمن جدول (٦) قيم الصدق للتقرير المركب م ← ب.

م	ب	م ← ب
١	١	١
١	صفر	صفر
صفر	١	١
صفر	صفر	١

جدول (٦)





لا شك أن قيم الصدق لهذه الدالة أحياناً تثير الجدل ولاسيما في الحالة التي تكون قيمة الصدق للتقرير أ ← ب تساوي (١) عندما تكون قيمة الصدق للتقرير أ تساوي صفر قيمة الصدق للتقرير ب تساوي (١) ولكن يجب ملاحظة أن دالة الاقتضاء تعني أن التقرير (ب) لابد من صدقه إذا ما صدق أ ولكن إن لم يصدق التقرير أ فليس هناك من قيود على التقارير ب لابد من صدقه إذا ما صدق أ ولكن إن لم يصدق التقرير أ فليس هناك من قيود على التقرير ب بل يجوز أن يكون صادقاً ويجوز أن يكون كاذباً.

إن بناء جدول الصدق لدالة الاقتضاء ليس بالسهولة التي قد تقسم بها جداول الصدق لبعض الدول الأخرى إلا أنه ومن حسن الحظ قد أمكن بناء جدول الصدق لدلالة الاقتضاء اعتماداً على دول الصدق (~، ∪، ∩) ويتضح ذلك من المثال التالي بعد الأخذ في الاعتبار أن تكافؤ المنطقي لتقريرين مركبين يعني تساوي قيم الصدق المتناظرة لهما.

مثال (١-٤-٤):

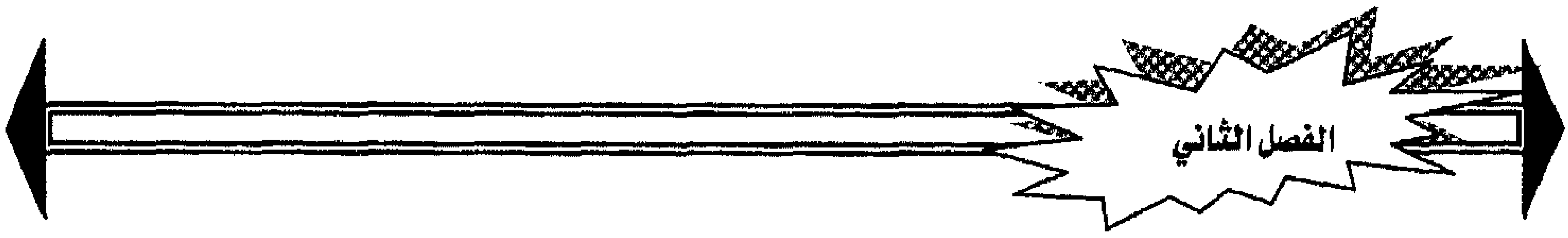
للتقرير المركب "إذا أخلصت في مذاكرتك نجحت بتفوق" نعتبر أن أ هو تقرير الإخلاص في المذاكرة وأن ب هو تقرير النجاح بتفوق فإن التقرير المركب أ ← ب يمكن إعادة صياغته دون أدنى تغير في المعنى من خلال الصياغتين الآتيتين:

(أ). أما لا تخلص في المذاكرة أو ستنجح بتفوق أي ~ أ ∪ ب.

(ب). لا يقبل أن تذاكر بإخلاص ولا تنجح بتفوق أي ~ (أ ∩ ~ ب)

وسوف يبين الجدول الآتي مدى تطابق التقارير الثلاثة أ ← ب، ~ أ ∪ ب، ~ (أ ∩ ~ ب) وللاختصار سوف نرمز للتقرير المركب أ ← ب





بالرمز α وللتقرير المركب ~ ﺃ ∪ ب بالرمز β وللتقرير المركب ~ (ﺃ ∩ ~ ب) بالرمز γ

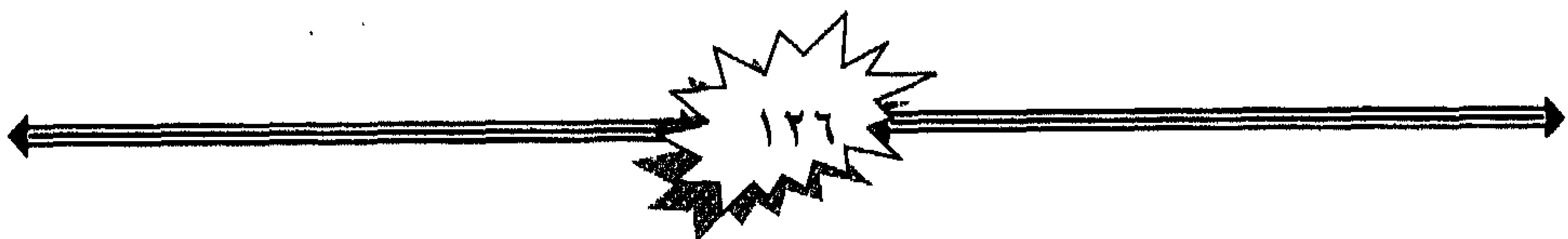
ﺃ	ب	~ ﺃ	~ ب	ﺃ ∩ ~ ب	α	β	γ
١	١	صفر	صفر	صفر	١	١	١
١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	صفر
صفر	١	١	صفر	صفر	١	١	١
صفر	صفر	١	١	صفر	١	١	١

جدول (٧)

نلحظ تطابق قيم الصدق المتناظرة في الأعمدة الثلاثة الأخيرة بالجدول وهذا يعني أن التقارير الثلاثة ← ﺃ ← ب، ~ ﺃ ∪ ب، ~ (ﺃ ∩ ~ ب) متكافئة منطقياً.

٥) الدالة الشرطية المزدوجة : Bicouditional Function

الدالة الشرطية المزدوجة أو دالة التكافؤ تستعمل في تكوين تقرير مركب من التقريرين ﺃ، ب على النحو الآتي (يكون ﺃ إذا وفقط إذا كان ب) وتقرأ أحياناً (يتحقق ﺃ إذا وفقط إذا تحقق ب) فتقرأ كذلك إن تحقيق ﺃ هو الشرط الضروري والكافي لتحقيق ب وهذا يعني (إذا كان ﺃ فإن ب وإذا كان ب فإن ﺃ) أي أن ﺃ ← ب ∩ ب ← ﺃ ويرمز للدالة الشرطية المزدوجة بالرمز ﺃ ↔ ب وعلى ما تقدم يمكن بناء جدول الصدق للدلالة الشرطية المزدوجة على النحو الآتي:



أ	ب	أ ← ب	ب ← أ	(أ ← ب) ∩ (ب ← أ)	أ↔ب
١	١	١	١	١	١
١	صفر	صفر	١	صفر	صفر
صفر	١	١	صفر	صفر	صفر
صفر	صفر	١	١	١	١

جدول (٨)

نلحظ من جدول الصدق السابق أن التقرير المركب أ ⇔ ب يأخذ قيمة الصدق ١ عند تساوي قيمتي الصدق للتقريرين ب، أ ويأخذ قيمة الصدق صفر عند اختلاف قيمتي الصدق للتقريرين أ، ب.

(١-٥) القانون والتناقص والتكافؤ المنطقي:

تعريف: (١-٥-١)

القانون المنطقي هو تقرير مركب من تقارير بسيطة مرتبطة ببعضها البعض بواسطة بعض دوال الصدق (~، ∪، ∩، ⟵، ↔) ويأخذ دائماً قيمة الصدق ١ مهما كانت قيم الصدق للتقارير البسيطة المكونة له.

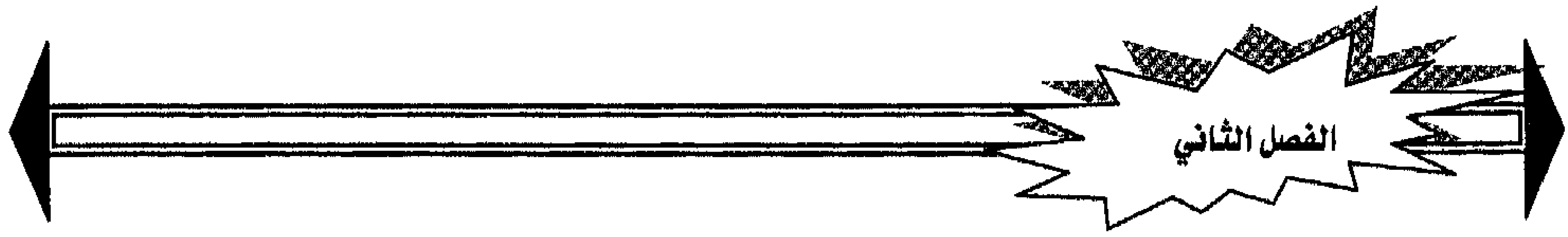
مثال (١-٥-١):

أثبت أن كل من التقارير المركبة الآتية قانوناً منطقياً:

أ) أ↔أ

ب) ~ (أ∩~أ)

ج) أ∪~أ



الحل:

م. نكون جدول الصدق للتقرير المركب م↔م كما هو مبين في الجدول الآتي:

م	م	م↔م
١	١	١
صفر	صفر	١

جدول (٩)

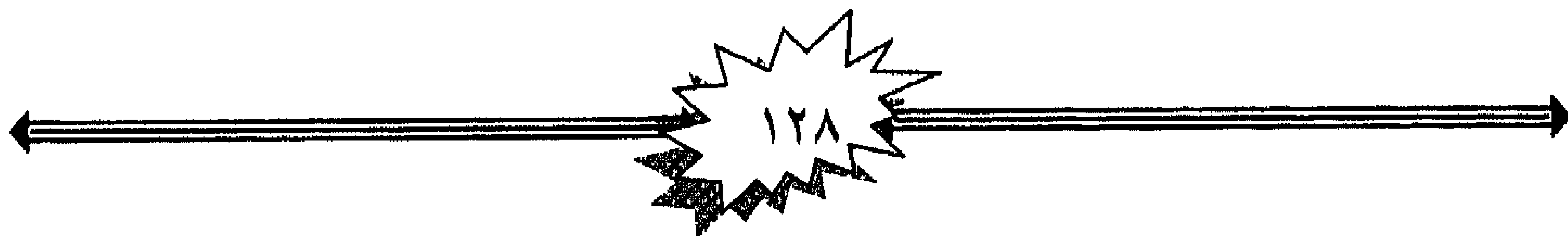
واضح من الجدول أن قيم الصدق للتقرير المركب م↔م دائماً تأخذ القيمة الصدق (١) وبالتالي هو قانون مع ملاحظة أن هذا القانون هو أحد مبادئ علم المنطق (المبدأ الأول) ونصه (م هو م) ويسمى مبدأ الذاتية.

ب. جدول الصدق للتقرير المركب ~ (م∩~م) هو على النحو الآتي:

م	~م	(م∩~م)	~ (م∩~م)
١	صفر	صفر	١
صفر	١	صفر	١

جدول (١٠)

من خلال الجدول يتضح أن التقرير المركب ~ (م∩~م) يأخذ دائماً قيمة الصدق ١ وبالتالي فهو "قانون" والجدير بالإشارة أن هذا القانون هو إحدى مبادئ علم المنطق الرياضي (المبدأ الثاني) الذي ينص على من الخطأ أن يكون م ونفي م في آن واحد، وليس من م عدم التناقض.



ج. جدول الصدق للتقرير المركب م ∪ ~م هو كما يلي:

م	~م	م ∪ ~م
١	صفر	١
صفر	١	١

يتضح من الجدول أن التقرير المركب م ∪ ~م يأخذ دائماً قيمة الصدق (١) على ذلك فهو قانون والجدير بالإشارة أن هذا القانون هو أحد مبادئ علم المنطق الرياضي (المبدأ الثالث) والذي ينص على (الأول وإلا فالثاني).

تعريف (١-٥-٢):

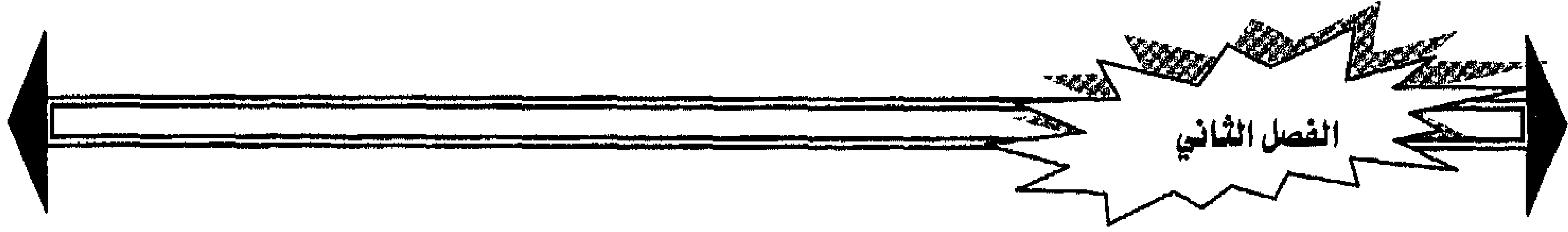
التقرير المركب م ∩ ~م تناقض حيث يأخذ دائماً قيمة الصدق صفر كما هو مبين بالعمود الثالث بجدول الصدق (١٠).

* ملحوظة:

إن لم يكن التقرير المركب قانوناً منطقياً أو تناقضاً منطقياً فيقال أنه غير ذلك أي لا هو قانون ولا هو تناقض وهذا يحدث بالطبع عندما تكون قيم الصدق من بينها قيمة على الأقل تساوي صفر وقيمة على الأقل تساوي (١).

* ملحوظة:

سوف نتناول فيما يلي دراسة بعض التقارير لمعرفة ما إذا كانت قانوناً منطقياً أو تناقضاً منطقياً أو غير ذلك مع ملاحظة أن المقصود بدراسة أي تقرير تعني توضيح ما إذا كان التقرير قانوناً منطقياً أم تناقضاً منطقياً أم غير ذلك.



مثال(١-٥-٢):

١. أدرس التقارير المركبة الآتية:

١- (أ ∩ (ب ∪ ج)) ↔ ((أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج)).

٢- ~ (أ ∩ (ب ∪ ج)) ↔ (~ أ ∪ (~ ب ∩ ~ ج)).

٣- (أ ∩ ~ ب) ← (~ ب ∩ ~ ج).

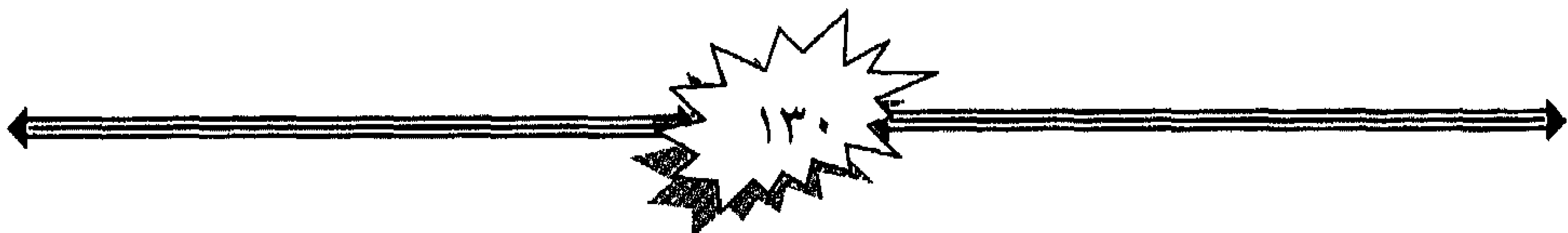
الحل:

للاختصار سوف نرمز للتقرير المركب أ ∩ (ب ∪ ج) بالرمز α والتقرير المركب (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج) بالرمز β والتقرير المركب المطلوبة دراسته أ ∩ (ب ∪ ج) ↔ (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ ج) بالرمز γ

وعلى ذلك يكون الجدول الصدق للتقرير المركب كما يلي:

أ	ب	ج	أ ∩ ب	أ ∩ ج	ب ∩ ج	α	β	γ
١	١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	صفر	١	صفر	١	١	١	١
١	صفر	١	صفر	١	١	١	١	١
صفر	١	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١
١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١
صفر	١	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١
صفر	صفر	١	صفر	صفر	١	صفر	صفر	١
صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١

جدول (١٢)



قيم الصدق بالعمود الأخير من الجدول تبين أن التقرير المركب المعطى هو قانون منطقي حيث يأخذ دائماً قيمة الصدق ١.

٢- للاختصار سوف نرمز للتقرير المركب (جـ ~ ∩ β ~) بالرمز α وللتقرير المركب (أ∩ (ب ∪ جـ)) بالرمز β وللتقرير المركب (جـ ~ ∩ ~ ب) ∪ أ ~ بالرمز γ وللتقرير المركب (جـ ~ ∩ ~ ب) ∪ أ ~ ↔ (جـ ∪ب) ∩ أ) ~ بالرمز δ (لاحظ أن التقرير المركب (جـ ∪ب) ∩ أ) ~ سيكون β- وبذلك نكون جدول للصدق التقرير المركب (جـ ~ ∩ ~ ب) ∪ أ ~ ↔ ((جـ ∪ب) ∩ أ) ~ على النحو التالي:

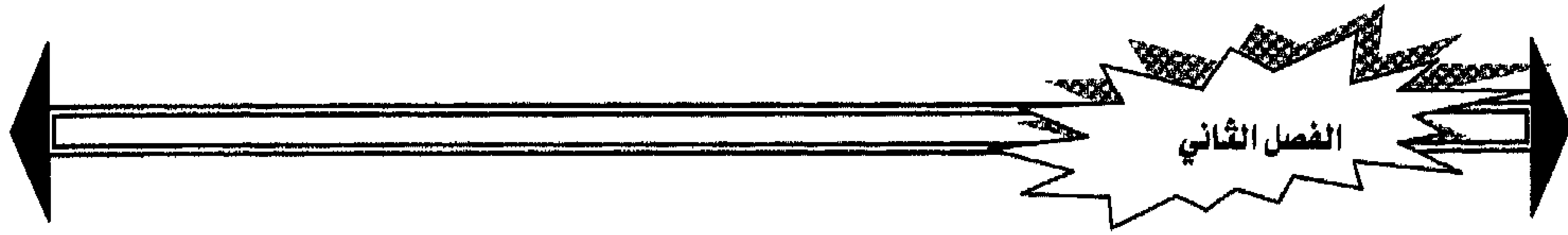
أ	ب	جـ	~أ	~ب	~جـ	جـ∪ب	α	β	-β	γ	δ
١	١	١	٠	٠	٠	١	٠	١	٠	٠	١
١	١	٠	٠	٠	١	١	٠	١	٠	٠	١
١	٠	١	٠	١	٠	١	٠	١	٠	٠	١
٠	١	١	١	٠	٠	١	٠	٠	١	١	١
١	٠	٠	٠	١	١	٠	١	٠	١	١	١
٠	١	٠	١	٠	١	١	٠	٠	١	١	١
٠	٠	١	١	١	٠	١	٠	٠	١	١	١
٠	٠	٠	١	١	١	٠	١	٠	١	١	١

جدول (١٣)

يتضح من قيم الصدق في العمود الأول من الجدول أن التقرير المركب المعطى هو قانون منطقي حيث يأخذ دائماً قيمة الصدق ١.

٣- نكون جدول الصدق الخاص بالتقرير المركب.

(~جـ ∩ ~ ب) ← (~ب∩ أ) آخذين في الاعتبار أننا سوف نرمز للتقرير له بالرمز α.



ٲ	ب	ج	~ ب	~ ج	ٲ ∩ ~ ب	~ ب ∩ ~ ج	α
١	١	١	٠	٠	٠	٠	١
٠	١	١	٠	١	٠	٠	١
١	٠	١	١	٠	١	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	٠	٠	١
١	٠	٠	١	١	١	١	١
٠	١	٠	٠	١	٠	٠	١
٠	٠	١	١	٠	٠	٠	١
٠	٠	٠	١	١	٠	١	١

هذا التقرير لاهو قانون منطقي ولا هو تناقض منطقي، حيث لا يخلو من إحدى قيم الصدق التي تساوي صفراً وأيضاً لا يخلو من إحدى قيم الصدق التي تساوي ١.

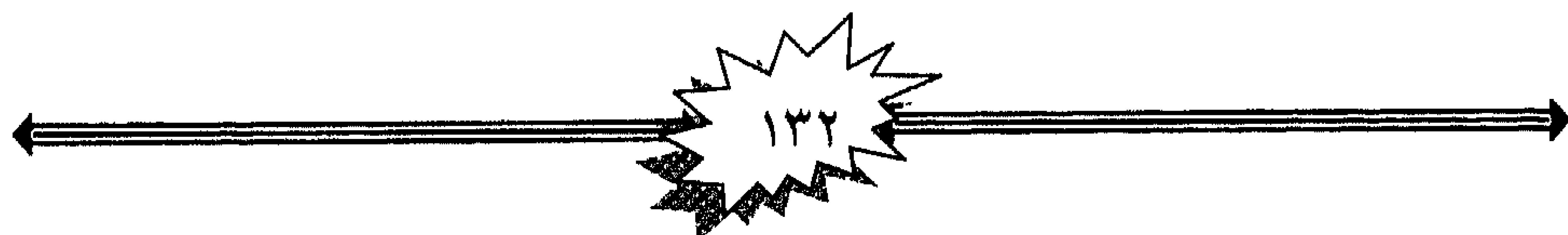
عند دراسة أي تقرير مركب معتمداً على بعض الشروط فإننا نعتبر هذه الشروط مبادئ وأسساً اتفق عليها من لهم علاقة بهذا التقرير كما أن تلك الشروط قد تيسر الحصول على قيمة (قيم) الصدق للتقرير مباشرة أو عن طريق جدول بسيط وسوف يتضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

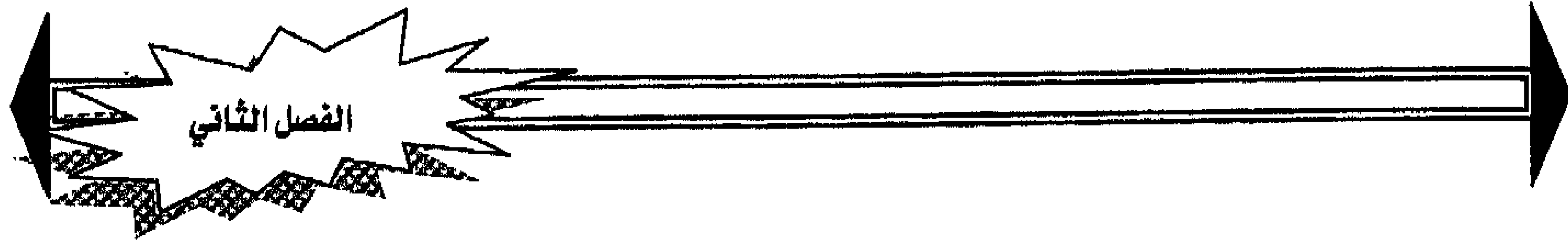
مثال (١-٥-٤):

إذا علمت أن قيمة الصدق للتقرير المركب ٲ v ب تساوي صفراً أوجد قيمة الصدق للتقرير المركب ٲ v ~ ب.

الحل:

من معرفتنا لدالة الفصل "v" يتضح أن التقرير المركب ٲ v ب بأخذ قيمة الصدق صفر في حالة واحدة فقط ألا وهي عندما تكون قيمة الصدق للتقرير ٲ





تساوي صفر وقيمة الصدق للتقرير ب تساوي صفر وعليه فإن قيمة الصدق للتقرير ~ ب تساوي ١، وبذلك تكون قيمة الصدق للتقرير المركب ﺃ v ~ ب تساوي ١ أي أن التقرير المركب ﺃ v ~ ب تحت الشروط المعطى تعد قانوناً منطقياً رغم أنه في الحالة العامة غير ذلك.

مثال (١-٥-٥):

بفرض أن قيمة الصدق للتقرير المركب (ب v ~ جـ) ← ﺃ تساوي صفراً أوجد قيمة الصدق للتقرير المركب (ﺃ v ب) ↔ (ب Λ جـ).

الحل:

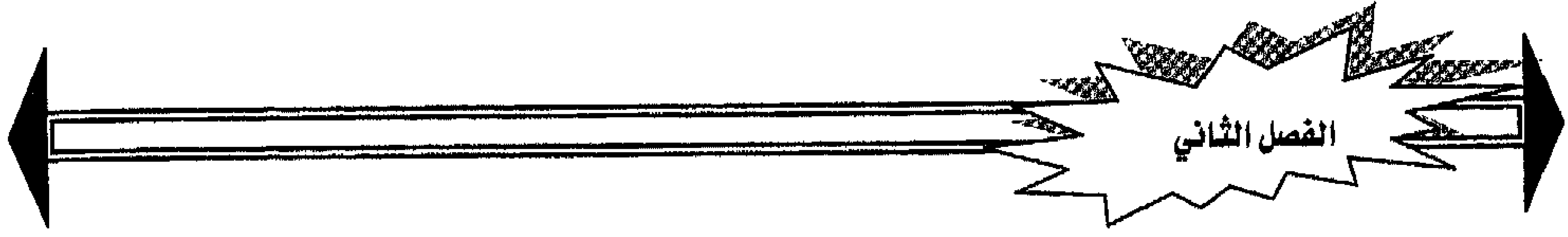
قيمة الصدق للتقرير المركب ﺃ ← (~ جـ v ب) تساوي صفراً تعني أن قيمة الصدق للطرف الأيمن (التقرير ﺃ) تساوي ١ وقيمة الصدق للطرف الأيسر (التقرير (ب v ~ جـ) تساوي صفراً في الوقت نفسه والأخير لا يتحقق إلا إذا كانت قيمة الصدق لكل من التقرير بين ~ جـ، ب تساوي صفراً وذلك من طبيعة دالة الرابطة " v" وهذا يؤدي على أن قيمة الصدق للتقرير ب يساوي صفر وقيمة الصدق للتقرير جـ تساوي ١.

من الاستنتاجات السابقة يكون المطلوب إيجاد قيمة الصدق للتقرير المركب ﺃ تساوي ١.

وقيمة الصدق للتقرير ب تساوي صفراً وقيمة الصدق للتقرير جـ تساوي ١ وبالتعريف المباشر نجد أن قيمة الصدق المطلوبة تساوي صفراً.

أي أن هذا التقرير المركب تحت الشروط المذكورة أصبح تناقضاً منطقياً رغم أن ليس كذلك في الصورة العامة، أي بدون الشروط المذكورة.





مثال (١- ٥- ٦):

إذا علمت أن قيمة الصدق للتقرير المركب (م ∪ ب) ↔ (~ ب ∩ م) تساوي واحد أوجد قيمة (قيم) الصدق للتقرير المركب (م ← ~ ب) ← (~ ب ← ~ م).

الحل:

التقرير المركب (م v ب) ↔ (~ ب Λ م) يأخذ قيمة الصدق ١ في حالتين هما:

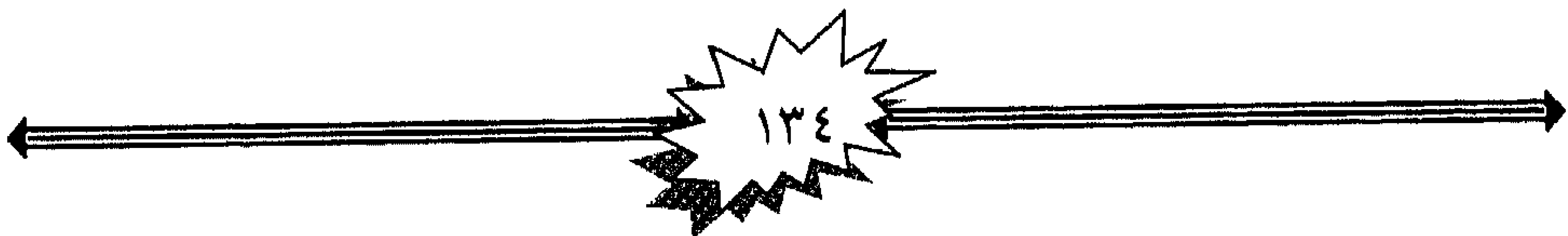
١) قيمة الصدق للتقرير م v ب تساوي ١، وعليه فإن قيمة الصدق لأحد التقريرين أو كليهما تساوي "١ "وفي الوقت نفسه تكون قيمة الصدق للتقرير المركب ~ ب Λ م تساوي ١ وعليه فإن قيمة الصدق لكل من التقريرين ~ ب، م تساوي ١ أي أن قيمة الصدق للتقرير م تساوي ١ وقيمة الصدق للتقريرين ب تساوي "١" والتي تؤدي إلى أن قيمة الصدق للتقرير ب تساوي صفراً وطالما أن قيمة الصدق للتقرير ب تساوي صفر، فلابد أن قيمة الصدق للتقرير م تساوي ١ في التقرير المركب م v ب.

٢) قيمة الصدق للتقرير المركب م v ب تساوي صفراً وقيمة الصدق للتقرير المركب~ ب Λ م تساوي صفر وهذا يؤدي إلى أن قيمة الصدق للتقرير م تساوي صفر وقيمة الصدق للتقرير ب تساوي صفر.

(تختار القيم التي تحقق طرفي التقرير المركب).

(م v ب) ↔ (~ ب Λ م)

مما تقدم يكون المطلوب هو إيجاد قيمة الصدق للتقرير المركب



(أ ← ~ ب) ← (~ ب Λ أ) في الحالتين الآتيتين:

١) قيمة الصدق للتقرير أ تساوي ١ وقيمة الصدق للتقرير ب تساوي صفر

٢) قيمة الصدق للتقرير أ تساوي صفر وقيمة الصدق للتقرير ب تساوي صفر.

وبالتعويض المباشر في التقرير المركب نحصل على الآتي:

في الحالة (١) تكون قيمة الصدق للتقرير المركب المعطى هي صفر، وفي الحالة (٢) تكون قيمة الصدق للتقرير المركب المعطى مساوية واحد أي أن التقرير المعطى تحت الشروط المذكورة لا هو قانون ولا هو تناقض.

حل آخر:

يمكن الاعتماد في الحل على جداول الصدق، مع الأخذ في الاعتبار فقط قيم الصدق المستنتجة من الشروط المعطاة، أي حسب قيمة الصدق للتقرير المركب(أ ← ~ ب) ← (~ب← ~أ) في الحالتين الآتيتين:

١) عندما تكون قيمتي الصدق للتقريرين أ، ب هما ١، ٠ على الترتيب

٢) عندما تكون قيمتي الصدق للتقريرين أ، ب هما ٠، ٠ على الترتيب

وللاختصار سوف نرمز للتقرير المركب (أ ← ~ ب) ← (~ب← ~أ) بالرمز α.

α	أ	ب	~أ	~ ب	أ v ب	(~ ب Λ أ)	أ ← ~ ب	~ب← ~أ
٠	٠	١	٠	١	١	١	١	٠
١	٠	٠	١	١	٠	٠	١	١

جدول (١٥)

يتضح لنا من قيم الصدق بالعمود الأخير بالجدول أن التقرير لا هو قانون ولا هو تناقض مع ملاحظة أن الشروط المعطاة استبعدت احتمالين آخرين لقيم الصدق، حيث أخذت فقط الحالات التي تتفق مع الشروط المعطيه.

مثال (١-٥-٧):

إذا علم أن التقرير أ ← ~ ب هو قانون منطقي، أوجد قيم الصدق للتقرير المركب (أ Λ ~ ب) ↔ (~ أ Λ ب).

الحل:

بما أن أ ← ~ ب قانون منطقي فإن القيمة الصدق لكل من التقريرين ~ ب، أ هي إما ١ وإما صفراً في الوقت نفسه، إذن قيمة الصدق لكل من التقريرين ب، أ هي إما ١، ٠ إما ٠، ١ على الترتيب، على ذلك نكون جدول الصدق للتقرير المركب ~ (أ Λ ~ ب) ↔ ~ أ Λ ب والذي سنرمز له بالرمز α كما يلي:

أ	ب	~ أ	~ ب	أ Λ ~ ب	~ (أ Λ ~ ب)	~ أ Λ ب	α
٠	٠	٠	١	١	٠	٠	١
١	١	١	٠	٠	١	١	١

جدول (١٦)

يتضح من العمود الأخير بالجدول أن التقرير ~ (أ Λ ~ ب) ↔ (~ أ Λ ب) يأخذ دائماً قيمة الصدق ١ في الحالتين السابقتين، وعلى ذلك فهو قانون منطقي تحت الشروط المعطى رغم أنه غير ذلك عامة.

تعريف (١-٥-٣):

يقال لتقريرين مركبتين إنهما متكافئان منطقياً إذا وفقط إذا كانت قيم الصدق المتناظرة لهما متساوية.

مثال (١-٥-٨):

بفرض أن أ، ب تقريران بسيطان فإن التقريرين المركبتين أ ↔ ب (أ ← ب) ↔ (ب ← أ) متكافئان منطقياً (انظر جدول (١٧)).

أ	ب	أ ← ب	ب ← أ	(أ ← ب) ↔ (ب ← أ)	أ ↔ ب
١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	١	١

جدول (١٧)

من قيم الصدق المتناظرة والمتساوية بالعمودين الأخير وقبل الأخير بالجدول يتضح أن التقريرين أ ↔ ب (أ ← ب) ↔ (ب ← أ) متكافئان منطقياً.

نظرية (١-٥-١):

لأي ثلاثة تقارير أ، ب، جـ يكون:

١) أ v أ ↔ أ

أ↔أ Λ أ قانون اللانمو **(idempotent law)**

٢) أ v ب ↔ ب v أ، أ Λ ب ↔ ب Λ أ

قانون الإبدال (Commutative law)

٣) أ ∧ (ب ∧ جـ) ↔(أ ∧ ب) ∧ جـ

أ ∨ (ب ∨ جـ) ↔(أ ∨ ب) ∨ جـ

قانون التجميع أو الدمج (associative law)

٤) (أ ∧ (ب ∨ جـ)) ↔ ((أ ∧ ب) ∨ (أ ∧ جـ))

(أ ∨ (ب ∧ جـ)) ↔ ((أ ∨ ب) ∧ (أ ∨ جـ))

قانون التوزيع (distributive law)

البرهان: سوف نقوم ببرهان العلاقتين الآتيتين:

i) (أ ∧ (ب ∧ جـ)) ↔ ((أ ∧ ب) ∧ جـ).

ii) (أ ∧ (ب ∨ جـ)) ↔ ((أ ∧ ب) ∨ (أ ∧ جـ).

ونترك الباقي كتمرين للطالب.

وللإجابة على الفقرتين السابقتين نفرض أن α ترمز للتقرير المركب أ ∧ (ب ∧ جـ) و ترمز β للتقرير المركب (أ ∧ ب) ∨ جـ و γ ترمز للتقرير المركب أ ∧ (ب ∨ جـ) و δ ترمز للتقرير المركب (أ ∧ ب) ∨ (أ ∧ جـ) ونكون جدول الصدق على النحو التالي:

أ	ب	جـ	أ Λ ب	أ Λ جـ	ب v جـ	ب ∧ جـ	α	β	γ	δ
١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	٠	١	٠	٠	٠	١	١
١	٠	١	٠	١	١	٠	٠	٠	١	١
٠	١	١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠		٠	٠	٠	٠

جدول (١٨)

وبالنظر إلى العمودين الأخير وقبل الأخير بالجدول نلحظ أن تطابق قيم الصدق للتقريرين (أ Λ ب) v (أ Λ جـ)، أ Λ (ب Λ جـ).

أي أن:

أ Λ (ب جـ v) ↔ (أ Λ ب) Λ جـ.

نظرية (١-٥-٢):

(١) دالة الاقتضاء ليست → أبدالية وليست تجميعية.

(٢) دالة الفصل v توزيعية على دالة الاقتضاء.

البرهان:

(١) دالــة الاقتــضاء ليــست أبداليــة حيــث أن التقريــرين (أ ← ج)، (ب ← أ) غير متكافئتين منطقياً وهذا يتضح من جدول الصدق الآتي:

أ	ب	أ ← ب	ب ← أ
١	١	١	١
١	٠	٠	١
٠	١	١	٠
٠	٠	١	١

جدول (١٩)

كما أن دالة الاقتـضاء ← ليـست تجميعيـة حيـث أنـه لأي ثلاثـة تقـارير أ، ج، د سوف يتضح لنا من جـدول الـصدق الآتـي أن التقريـرين (أ ← ب) ← ج، أ← (ب ← ج) غير متكافئين منطقياً.

أ	ب	ج	أ ← ب	ب ← ج	أ← (ب ← ج)	(أ ← ب) ← ج
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	٠	١	١	١
٠	١	٠	١	٠	١	٠
٠	٠	١	١	١	١	١
٠	٠	٠	١	١	١	٠

جدول (٢٠)

(٢) لأي ثلاثة تقارير أ، ب، ج نعتبر أن α ترمز للتقرير المركب أ ∨ (ب ← ج) و ترمز β للتقرير المركب (أ ∨ ب) ← (أ ∨ ج)

وعليه نكون جدول الصدق الآتي:

أ	ب	ج	أ ∨ ب	أ ∨ ج	ب ← ج	α	β
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	٠	١	١
١	٠	١	١	١	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	١	١	١	١
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	١	١	١

جدول (٢١)

الجدول السابق يبين أن ∨ توزيعية من ناحية اليسار ← أي أن:

(أ ∨ (ب ← ج)) ↔ ((أ ∨ ب) ←∨ (أ ∨ ج).

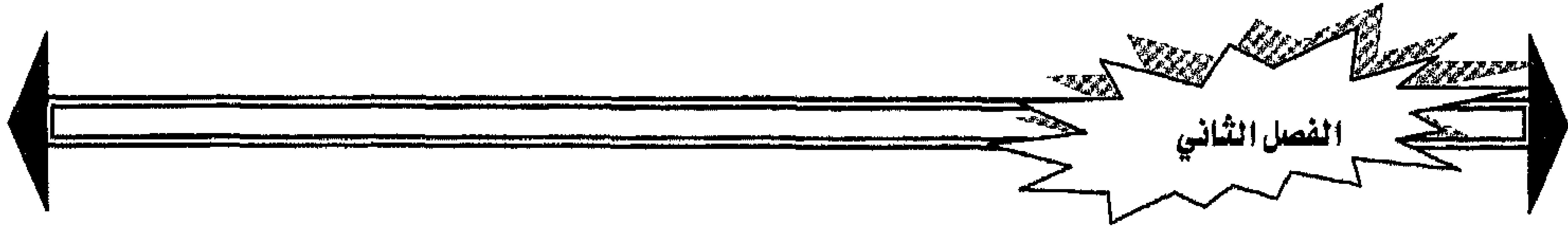
وحيث أن ∨ أبدالية فإن:

(أ ∨ (أ ← ج)) ↔ ((أ← ج) ∨ أ) (i).

((أ ∨ ب) ← (أ ∨ ج) ↔ (ب ج ∨) ← (ج ∨ أ)) (ii).

من (i) و (ii) نحصل على الآتي:

((ب ← ج) ∨ أ) ↔ ((ب ∨ أ) ← (ج ∨ أ))



أي أن v توزيعية من ناحية اليمين على دالة الاقتضاء ← وعلى ذلك فإن توزيعية على←.

نظرية (١-٥-٣):

فرض أن أ، ب تقريران إذن:

(i) ~ (أ v ب) ↔ (~ أ ∩ ~ ب).

(ii) ~ (أ ∩ ب) ↔ (~ أ v ~ ب).

البرهان:

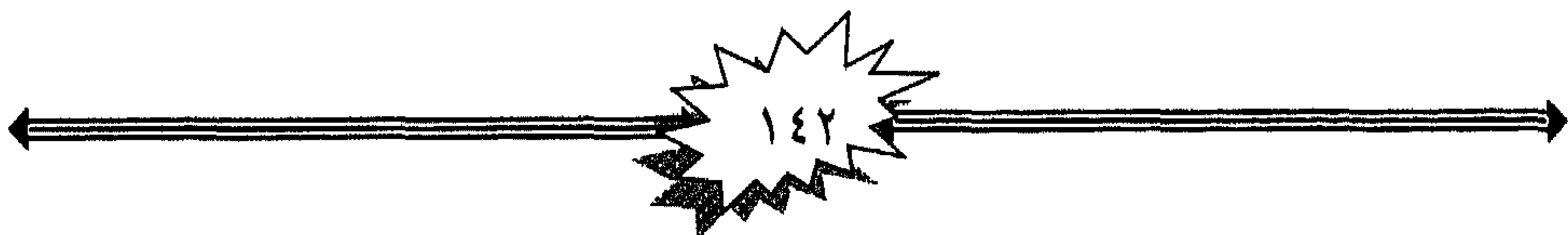
نفرض أن α نرمز للتقرير المركب ~ (أ v ب) و ترمز β للتقرير المركب ~ أ ∩ ب و ترمز γ للتقرير المركب ~(أ ∩ ~ ب) و ترمز δ للتقرير ~ أ ~ v وعليه نكون الجدول الآتي:

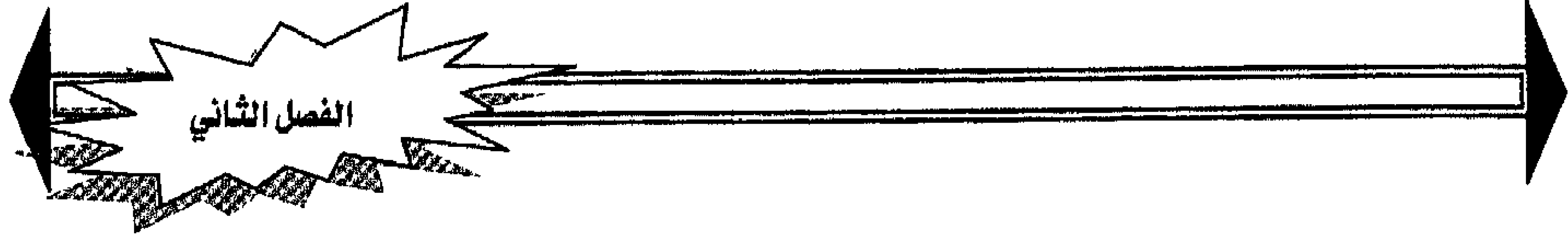
أ	ب	~ أ	~ ب	أ v ب	أ ∩ ب	α	β	γ	δ
١	١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	١	١
٠	١	١	٠	١	٠	٠	٠	١	١
٠	٠	١	١	٠	٠	١	١	١	١

جدول (٢٢)

نلحظ من الجدول السابق ومن خلال تطابق قيم الصدق المتناظرة بالعمودين الآخرين أن:

~ (أ v ب) ↔ (~ أ ∩ ~ ب)





كما نلحظ من تطابق قيم الصدق المتناظرة بالعمودين قبل الأخيرين أن:

~ (أ ∩ ب) ↔ (~ أ ∨ ~ ب)

(١-٦) الدلالات والرموز:

يتضح لنا مما سبق أن تقرير ما قد يتحقق في كل الحالات وقد لا يتحقق في بعض أو كل الحالات لذلك لو اعتبرنا أن أ تقرير ما إن × مجموعة غير خالية فقد أتفق من أجل الاختصار في الكلام أن نعبر عن الحالات الآتية رمزيا كما يلي:

"لأي عنصر س ∋ التقرير ل محقق" بالرمز ∀ س: ل (س)

"يتحقق التقرير ل من أجل عنصر واحد على الأقل بالرمز ∃ س: ل (س)

"يوجد عنصر واحد على الأقل لا يتحقق التقرير ل .. بالرمز ∃ س: ~ ل (س).

"لأي عنصر س ∋ التقرير ل غير محقق .. بالرمز ∀ س: ~ ل (س).

ويجب ملاحظة أن بالرمز س: ∀ س: ل (س) ⟵ ∃ س: ل (س).

~ (∀ س: ل (س)) ↔ ∃ س: ~ ل (س).

~ (∃ س: أ (س)) ↔ ∀ س: ~ ل (س).

الرمز ∀ يعني لكل، ولأي والرمز ∃ يعني يوجد والرمز: يعني بحيث



تمارين (١):

١) حدد التقارير من بين العبارات الآتية ثم أوجد قيمة الصدق لكل تقرير:

أ) ما أجمل التفوق.

ب) ١٢ عدد زوجي.

جـ) س^{٢} < صفر حيث س عدد حقيقي.

٢) أوجد قيمة الصدق لكل تقرير من التقارير المركبة الآتية:

أ- (أ ∩ ب) ↔ (~ أ ∨ ~ ب)

ب- (أ ∪ ب) ∩ (جـ ← ~ (أ ∩ ب))

جـ - (~أ ∩ ب) ∨ (أ ∨ ب)

د- (أ ↔ ~ ب) ∨ (ب ← أ)

هـ- (أ ∪ ∨ ~ ب) ← (أ ∩ ب)

و- ~ (أ ∪ ب) ← (ب ↔ جـ)

٣) أدرس التقارير المركبة الآتية:

أ- ~ أ ∩ (ب ∨ جـ) ↔ (~ أ ∨ (~ ب ∩ ~ جـ))

ب- أ ↔ (أ ∩ ~ أ)

جـ - ((أ ← ب) ∩ (ب ← جـ)) ← (أ ← جـ)

د- أ ∨ ب ↔ (~ (أ ∩ ~ ب)

هـ- (أ ∩ ب) ↔ (أ ∩ ~ ب)

٤) إذا كانت قيمة الصدق للتقرير المركب (أ ∨ ب) ← (ب ∨ جـ) تساوي صفر أوجد قيمة الصدق للتقارير الآتية:

أ- (أ ← ب) ↔ ((أ ∩ جـ) ∩ ب)

ب- (أ ↔ (أ ← جـ)) ∨ (أ ← ب)

جـ- (أ ∨ ب ∨ جـ) ↔ [(أ ← ب) ∩ (ب ← جـ)]

٥) إذا علم أن التقرير أ ↔ ب تناقض منطقي فأوجد قيمة (قيم) الصدق للتقرير المركب الآتي:

~ (أ ∩ ~ ب) ← (أ ∨ ~ جـ)

٦) إذا علم أن قيمة الصدق للتقرير أ تساوي الصفر وقيمة الصدق للتقرير المركب (~ جـ ∨ أ) ↔ ب تساوي (١) فأدرس التقرير المركب الآتي:

[(أ ← جـ) ↔ أ ∩ ب] ↔ ((~أ ← جـ) ∨ ب)

٧) إذا علم أن قيمة الصدق للتقرير المركب أ ← (ب ∨ أ) تساوي صفر أوجد قيم الصدق للتقرير المركب الآتي:

(أ ← ~ ب) ↔ ((أ ∩ جـ) ∩ ب)

٨) إذا علم أن قيمة الصدق للتقرير أ ← ب يساوي صفر أدرس التقرير المركب الآتي:

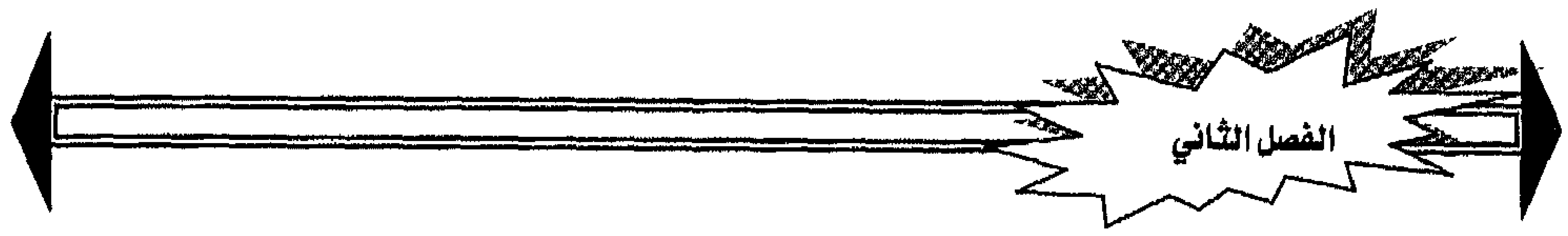
[(أ ∩ ~ جـ) ← ~ ب] ↔ (أ ∨ ~ ب)

٩) من خلال بناء جداول الصدق المناسبة أجب عن الأسئلة:

أ) هل دالة الاقتضاء توزيعية على دالة الفصل ∨ ؟

ب) هل دالة الاقتضاء توزيعية على دالة الوصل ∩؟

جـ) هل دالة الوسط ∩ توزيعية على دالة الاقتضاء ←؟



الباب الثاني

المجموعات SETS

* **مقدمة: Introduction**

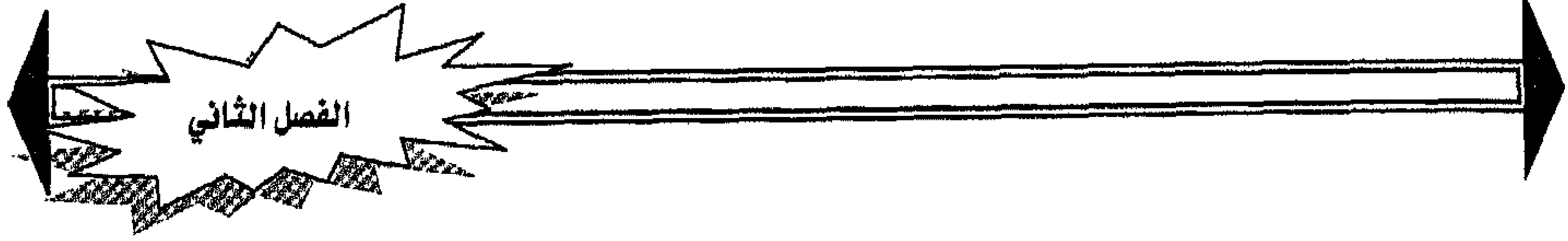
يعد مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في الرياضيات الحديثة وهو من البساطة بحيث يمكن إدراكه في حياتنا اليومية من خلال الحديث عن أفراد الأسرة أو من خلال محتويات الشقة أو من خلال طلاب الفرقة بالمدرسة أو من خلال أعضاء فريق كرة القدم بالمدرسة.... الخ إننا أمام شيء مكون من عدة أفراد وقد اتفق على تسمية هذا الشيء المجموعة Set أما الأفراد فتسمى عناصر وقد كان العالم الألماني Cantor (١٨٤٥ - ١٩١٨) أول من اعتبر المجموعة مفهوماً أساسياً يتميز بما يلي:

(١) المجموعة مفهوم رياضي قائم بذاته ويختلف عن مفهوم الأفراد التي تكونه فالحديث مثلاً عن باقة من الزهور (حتى لو كانت مكونه من زهره واحدة) يختلف عن حديثنا عن تلك الزهور.

(٢) العناصر متباينة في أي مجموعة أي لا يتكرر ظهور أي عنصر داخل المجموعة.

(٣) التحديد الجيد للمجموعة بحيث يمكن الحكم على عنصر ما فيما إذا كان منتمياً لمجموعة ما أو لا ينتمي بطريقة سهلة وواضحة لا لبس فيها ولا غموض ولا يختلف الحكم على ذلك من شخص لأخر حيث مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٣،١٢هي مجموعة رياضية أما مجموعة





الكرماء في لا تمثل مجموعة رياضية حيث وصف الشخص بالكرم قد يختلف من شخص لأخر كذلك مجموعة الأعداد الصحيحة التي هي أكبر بكثير من ١٢ لا تمثل مجموعة رياضية حيث لا يتفق اثنان في الحكم على العنصر ٣٠ مثلاً من حيث الانتماء من عدمه إلى تلك المجموعة.

ومن المتفق عليه أن نرمز للمجموعات بالأحرف الكبيرة ..... A, B, C والعناصر بالأحرف الصغيرة ... a, b, c كما اتفق على أنه يتم التعبير عن أي مجموعة بكتابة كل عناصرها بين قوسين رياضيين مع وضع فاصلة بين كل عنصر فمثلاً المجموعة المكونة من العناصر س ص ع تعبر عنها هكذا:

ﭐ= { س، ص، ع }

مع ملاحظة أن المجموعة لا تتأثر بترتيب العناصر في الظهور فمثلاً:

ب = { ١، ٢، ٣، ٤ } = { ٤، ٢، ٣، ١ }

كما نعبر عن انتماء العنصر ما وليكن س لمجموعة ما ولتكن ﭐ كما يلي:

س ∈ ﭐ

أو نقول أن قيمة انتماء العنصر س للمجموعة ﭐ تساوي (١) أي أن:

ﭐ (س) = ١ ↔ س ∈ ﭐ

ونعبر عن عدم انتماء عنصر ما وليكن ل للمجموعة ﭐ تساوي صفر أي:

ﭐ (ل) = صفر ↔ ل ∉ ﭐ



(٢-٢) طرق تعيين المجموعات:

يمكن تعيين المجموعات بإحدى الطرق التالية:

١) كتابة كل عناصر المجموعة أن أمكن ذلك: مثل:

أ = { س، ص، ع * }

٢) كتابة بعض عناصرها فقط مع وضع ٣ نقاط بعد تلك العناصر للإشارة إلى أن هناك عناصر قد حذفت ويمكن التعرف عليها بسهولة من خلال ما أدرج من عناصر

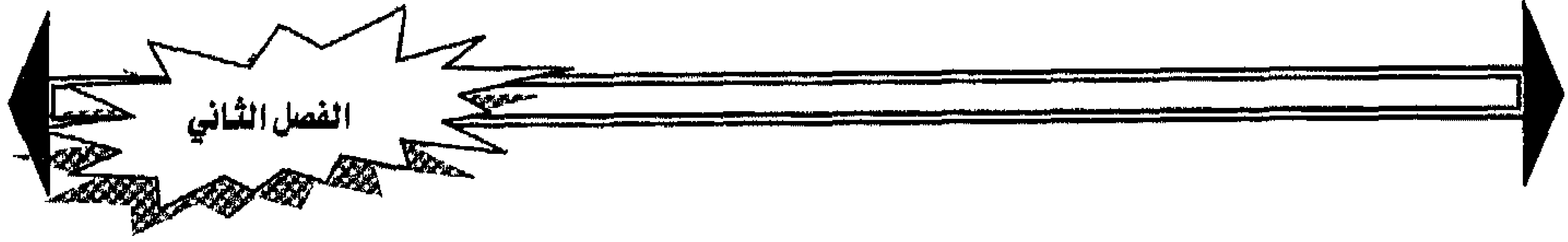
٣) الاكتفاء بالصفة المميزة التي من خلالها يمكن الحكم فيها إذا كانت شيئاً ما هو عنصر من عناصر تلك المجموعة أم لا إي إذا كان ح (س) خاصية تقيم س فإن مجموعة كل العناصر س التي تصح لها الخاصية ح (س) تكتب كما يلي:

{ س: ح (س) }

أي مجموعة كل العناصر س التي تحقق الخاصية ح (س).

مثال (٢-٢-١):

نفرض أن أ= { ٣، ٦، ٩، ... } من الواضح أنه يمكن الحكم على أي عنصر فيما إذا كانت منتمياً لتلك المجموعة من عدمه فمثلاً العدد ٢٤ ينتمي إلى أ لأنه موجب ويقبل القسمة على ٣ بينما العدد ١٣ لا ينتمي إلى أ وكذلك العدد ⁻٢٤ لأنه سالب لكن ب = { ٣، ١٦، ٩٩ ..... } لا تعد مجموعة لأنها



تفتقر للتحديد الجيد لعناصرها حيث وعلى سبيل المثال لا يمكن الحكم عما إذا كان العنصر (٥) منتمياً لتلك المجموعة من عدمه.

مثال (٢-٢-٢"):

إن أكثر المجموعات استعمالاً خلال هذا الكتاب هي المجموعات العددية والتي نذكر بعضاً منها وكذلك الرمز المحدد لكلا مجموعة على النحو الآتي:

١) مجموعة الأعداد الطبيعية:

ط = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ..... }

٢) مجموعة الأعداد الطبيعية مضاف إليها صفر:

ط$_{\text{صفر}}$ = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ..... }

٣) مجموعة الأعداد الصحيحة:

ص = { ....، -٢، -١، صفر، ١، ٢، .... }

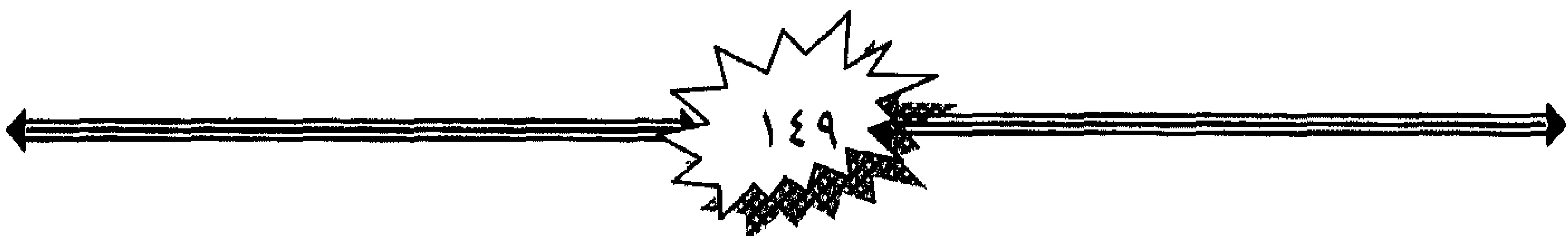
٤) مجموعة الأعداد النسبية:

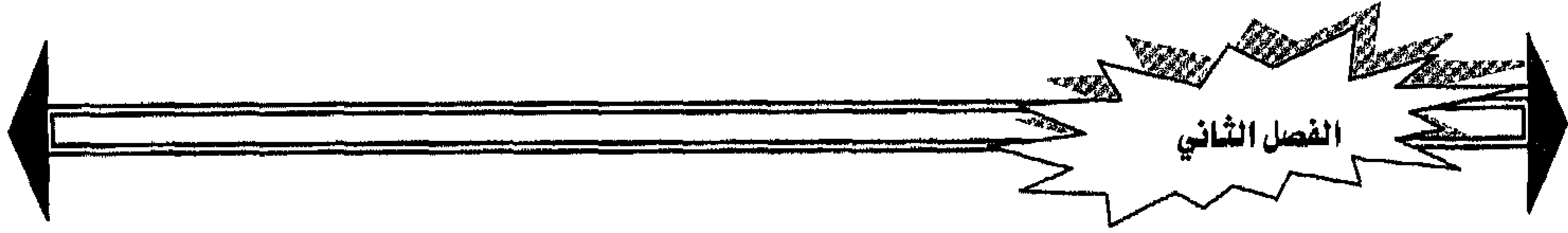
ن = { ي: ي = أ/ب، أ ∈ ص، ب ∈ ط}.

٥) مجموعة الأعداد الحقيقية (ح).

٦) مجموعة الأعداد المركبة:

ك = { أ: أ = س + ὼ ذ ص و س، ص، ∈ ح }





(٢-٣) المجموعة الخالية : Empty set

تعريف (٢-٣-١):

إذا حددت مجموعة ما بخاصية معينة وأتضح أنه لا يوجد أي عنصر يحقق تلك الخاصية فإننا نقول: أن تلك المجموعة هي مجموعة خالية ويرمز لها بالرمز ∅ أو { } وقيمة انتماء أي عنصر لتلك المجموعة = صفر

مثال (٢-٣-١):

∅ = { س: س ∈ ح و س^{٢} < صفر }، ∅ ={ س: س ≠ س }

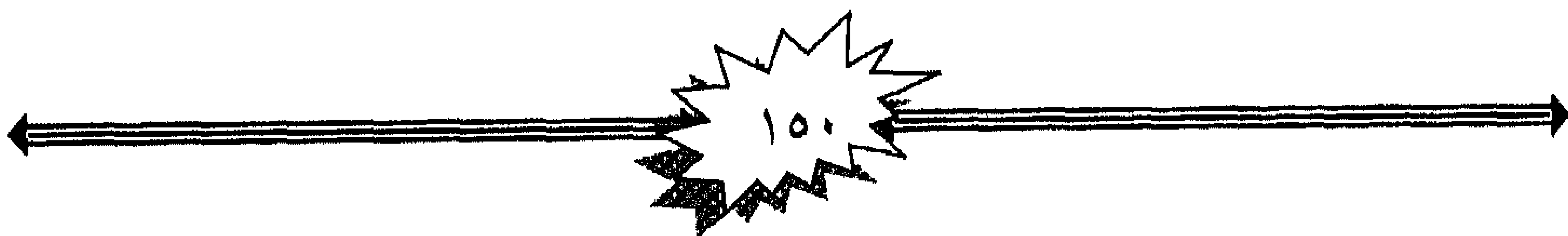
يجب ملاحظة أن أي مجموعتين خاليتين تكونان متساويتين حيث أنه لا توجد سوى مجموعة خالية واحدة فقط.

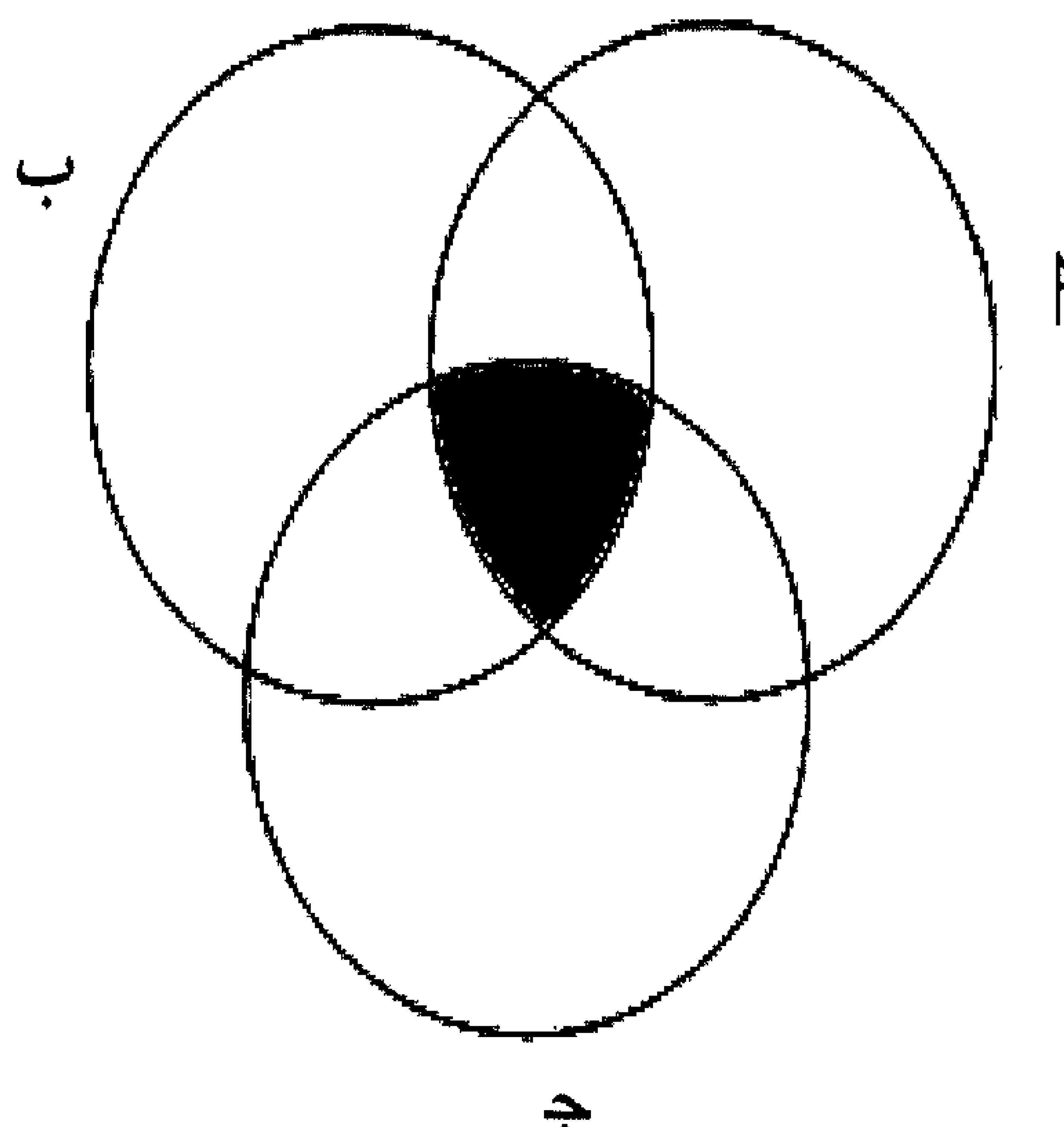
تعريف (٢-٣-٢):

تسمى المجموعة مجموعة أحادية إذا احتوت فقط على عنصر واحد مثل المجموعة { س }.

(٢-٤) مخططات فن : (Veun)

وضع جون فن عام ١٨٨٠ المخطط الموضح في شكل واحد وفيه استبدال مجموعة أشياء بمناطق من المستوى فالمنحنى أ يمثل الناس الفرنسيين، والمنحنى ب يمثل الجنرالات، والمنحنى جـ يمثل الذين يحملون ميداليات بسهولة.



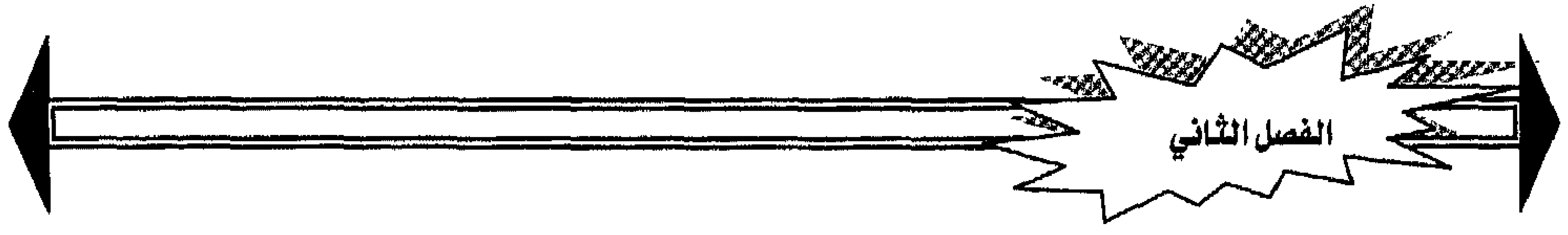


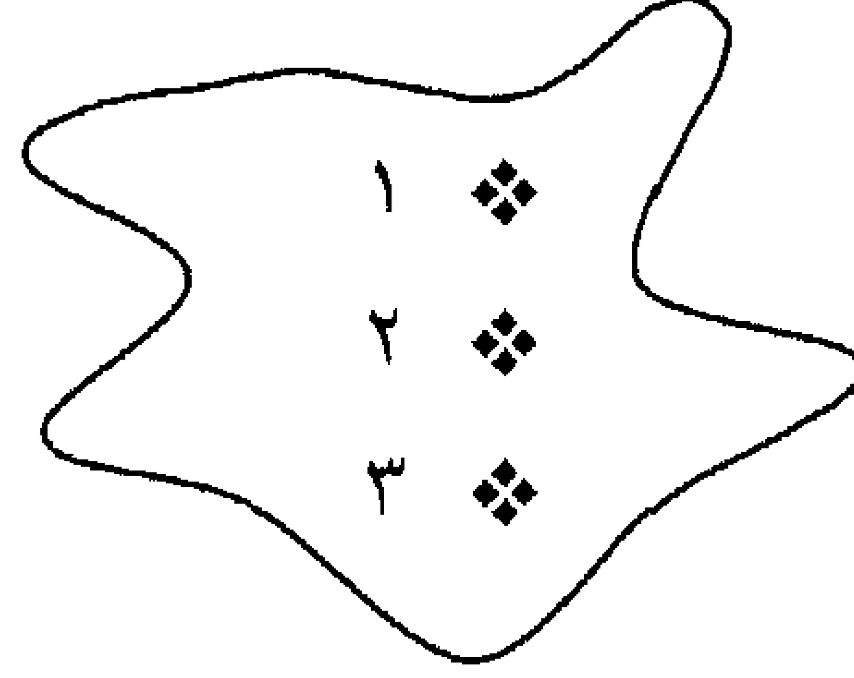
شكل (١)

من خلال هذا المخطط نستطيع أن نحدد العلاقة بين تلك المجموعات فمثلاً المنطقة الداكنة تمثل الفرنسيين الجنرالات التي يحملون ميداليات ويستفاد من مخطط فن في إيضاح كثير من قضايا نظرية المجموعات حيث تمثل المجموعة بمنحنى مغلق و الذي يسمى مخطط فن:

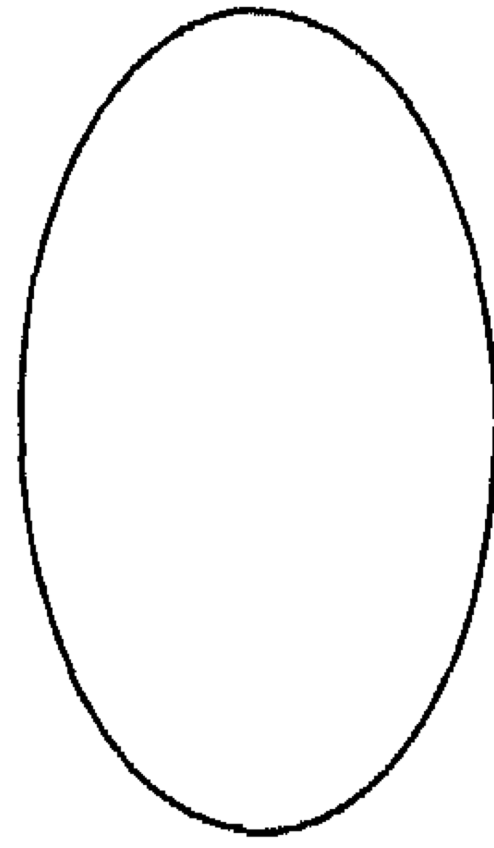
مثال (٢-٤-١):

المجموعة أ= { ١، ٢، ٣} تمثل المخطط المبين بالشكل (٢) كما تمثل المجموعة الخالية بالشكل (٣).





شكل (٢)


شكل (٣)

(٢-٥) المجموعة الجزئية والاحتواء Subset and Containing:

تعريف (٢-٥-١):

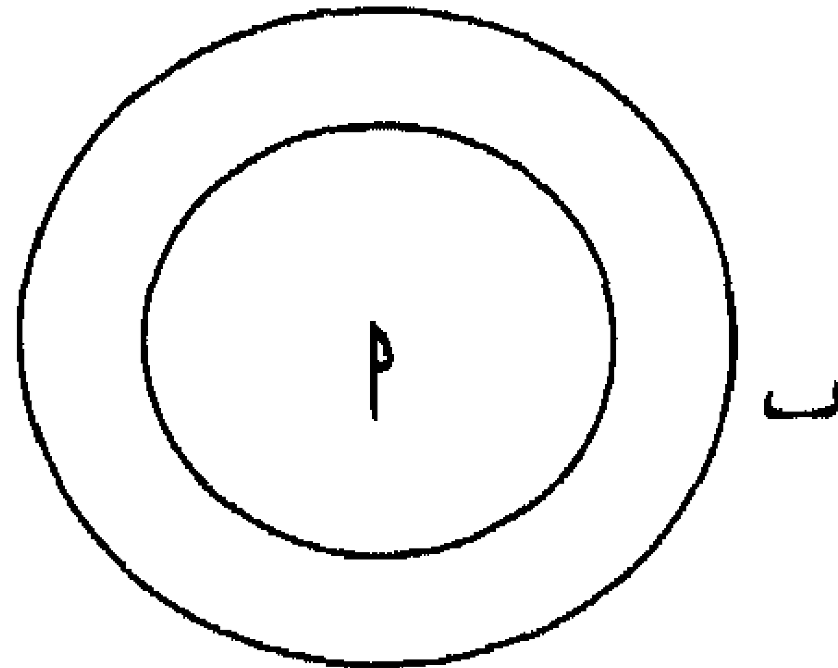
يقال أن المجموعة أ مجموعة جزئية من مجموعة ب وتكتب أ ≥ ب إذا كان كل عنصر في أ هو أيضاً في ب أي أن:

أ ≥ ب ↔ (∀ (الكل) س أ ∋ ← س ∋ ب)

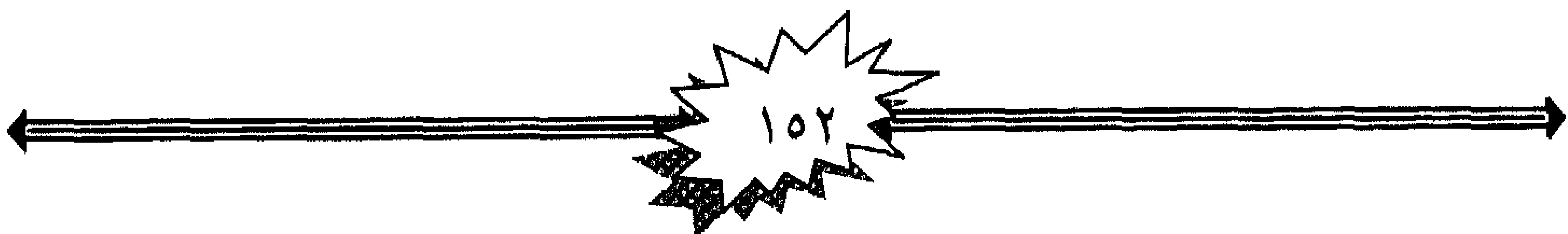
ويمكن التعبير عن الاحتواء بطريقة أخرى على النحو الآتي:

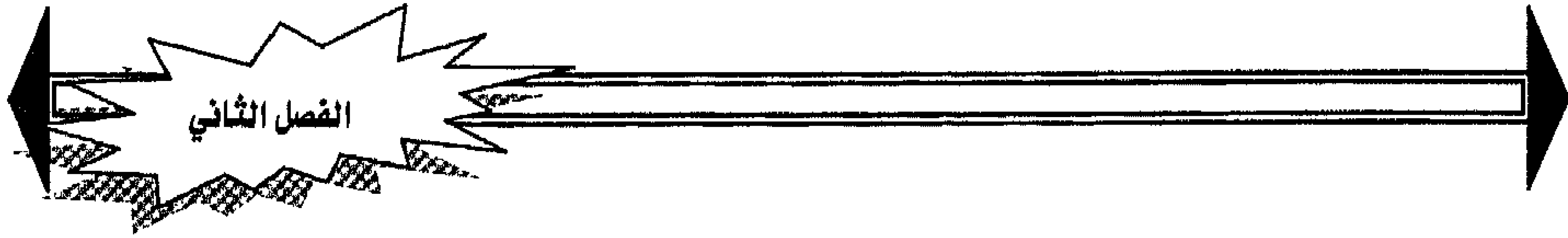
أ ≥ ب ↔ (∀ (الكل) س أ ∋ ← س ∋ ب)

ويمكن تمثيل احتواء المجموعة ب من خلال مخطط فن كما هو بشكل (٤)



شكل (٤)





ملحوظة (١):

لأي مجموعات أ، ب، جـ يتحقق الآتي:

i) أ ⊆ أ

ii) ∅ ⊆ أ

iii) أ ⊆ ∅ ↔ A = ∅

iv) إذا أ ⊆ ب Λ ب ⊆ جـ ⟵ أ ⊆ جـ

تعريف (٢-٥-٢):

يقال أن المجموعتين أ، ب متساويتان إذا كان:

أ ⊆ ب، ب ⊆ أ فنكتب أ = ب أي أن:

أ = ب ↔ (أ ⊆ ب، ب ⊆ أ)

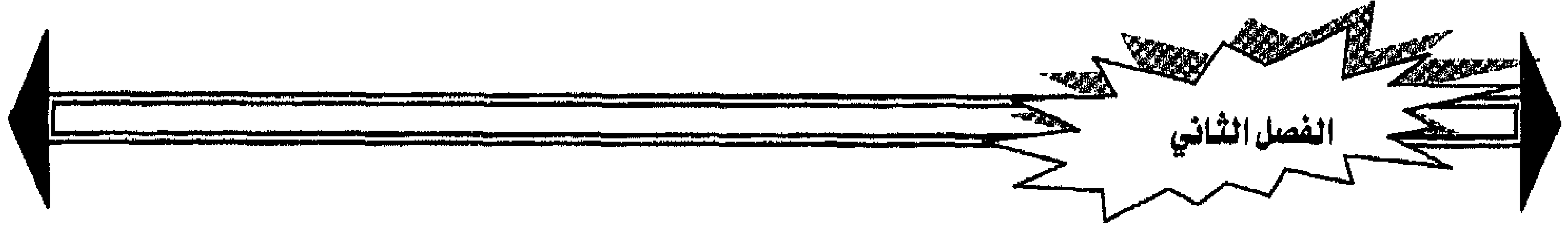
ويقال أن أ مجموعة جزئية خالصة أو فعلية (proper subset) من ب إذا كان:

ب ⊈ أ، أ ⊆ ب ويرمز لها بالرمز أ ⊂ ب

ملحوظة (٢):

إن صحة ∅ ⊆ أ تنتج من المبدأ المنطقي ألا وهو أن الفرضية الكاذبة تؤدي إلى أن نتيجة مهما كانت فهكذا فالعبارة إذا "س ∈ ∅ ⟸ س ∈ أ" صادقه لأن س ∈ ∅ كاذبة دائماً.





تعريف (٢-٥-٣):

يقال بمجموعة أنها منتهية أو محدودة إذا كانت محتوية على عدد محدود من العناصر ويقال أنها لا نهائية أو غير محدودة إذا كانت محتوية على عدد غير محدود أو غير منته من العناصر وإذا كانت المجموعة ﺃ منتهية فإن عدد عناصرها ن يسمى رتبة المجموعة ويرمز لها بالرمز |ﺃ| ويسمى أحياناً العدد الكاردينالي ويرمز له بالرمز ن (ﺃ).

(٢-٦) مجموعة القوى (power set):

تعريف (٢-٦-١):

إذا كانت س مجموعة غير خالية فإن المجموعة التي تحتوي على كل المجموعات الجزئية من س تسمى مجموعة جمع المجموعات الجزئية للمجموعة س أو بمجموعة قوة (power set) س ويرمز لها بالرمز ح (س) أي أن:

ح (س) = {ﺃ: ﺃ ⊇ س}.

ويجب ملاحظة أن:

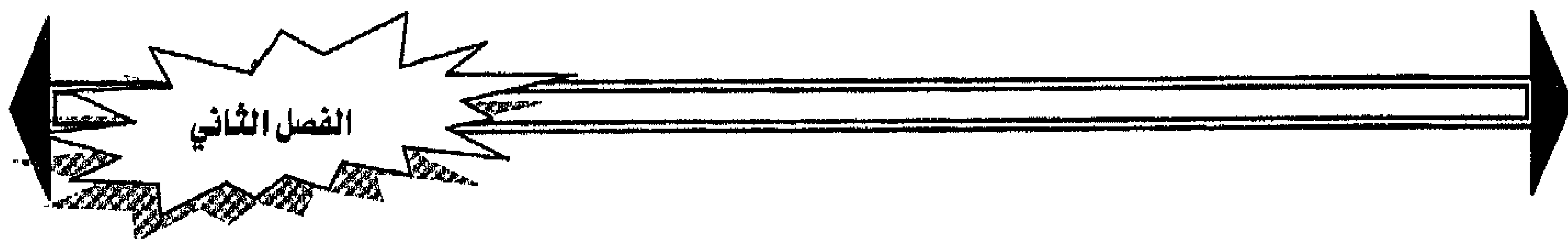
(i) ∅ ⊆ س ← ∅ ∈ ح (س).

(ii) س ⊆ س ← ∈ ح (س).

(iii) إذا س ∈ س ← { س } = ح (س).

(iv) إذا س = ∅ ⟸ ح (س) = { ∅ }.





مثال (٢-٦-١):

نفرض أن: س = {أَ، بَ، جَ}.

∴ ح(س) = {∅، {أَ}، {بَ}، {جَ}، {أَ ،بَ}، {أَ، جَ}، {بَ ، جَ}، س}.

نلحظ أن عدد عناصر المجموعة س هي ن = ٣ كما نلحظ أن عدد عناصر ح (س) تساوي (٨ = $٢^٣$). إن هذه الملحوظة تدفعنا إلى النظرية التالية والتي تحدد العلاقة بين عناصر مجموعة منتهية وعدد عناصر قوتها.

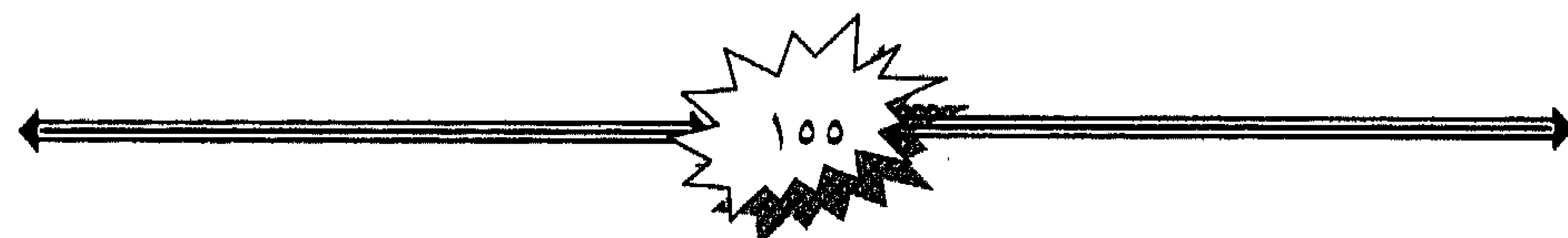
نظرية (٢-٦-١):

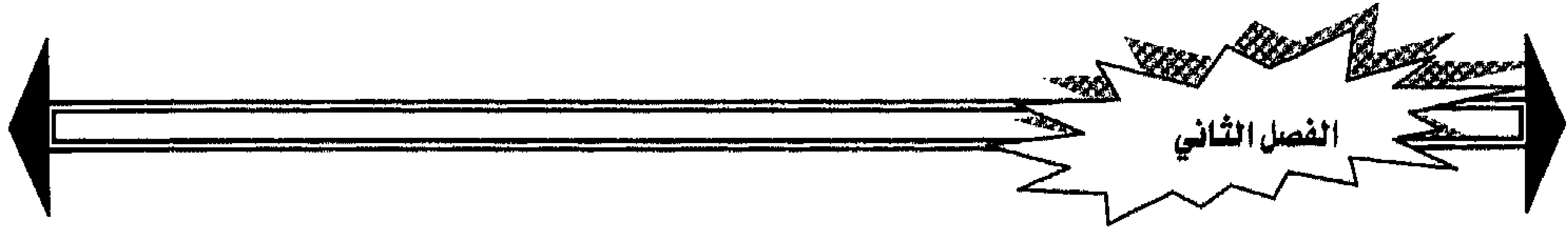
لأي مجموعة منتهية تحتوي على ن عنصر تكون عدد المجموعات الجزئية لها هي: $٢^{ن}$

البرهان:

نفرض أن س مجموعة منتهية تحتوي على ن عنصر، لحصر المجموعات الجزئية لها نتبع التالي:

- أول مجموعة جزئية س هي ∅
- عدد المجموعات الجزئية الأحادية هي $\binom{ن}{١}$
- عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على عنصرين هي $\binom{ن}{٢}$
- عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ثلاثة عناصر هي $\binom{ن}{٣}$





- عدد المجموعات الجزئية التي تستوي على $\binom{ن}{ن-1}$

- عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ن عنصر هي $\binom{ن}{ن}$

(لاحظ أن المجوعة س هي المجموعة الوحيدة التي تحتوي على ن عنصر) ولكن:

$$١ + \binom{ن}{١} + \binom{ن}{١} + ...+ \binom{ن}{ن-١} + \binom{ن}{ن} = (١+١)^{ن} = ٢^{ن}$$

∴ عدد كل المجموعات الجزئية للمجموعة س = $٢^{ن}$ أي أن:

عدد عناصر ح (س) = $٢^{ن}$

المثال التالي:

نبين الاستخدام الصحيح للانتماء (∈) والاحتواء (⊆).

مثال (٢-٦-٢):

إذا كانت س = {أ، ب، جـ} بين الخطأ من الصواب فيما يلي:

١) {أ} ∈ س

٢) {أ ،ب} ⊂ ح(س)

٣) {∅} ∈ ح(س)

٤) {∅} = ∅

٥) {أ} ⊆ ح(س)



٦) {أ، ب} ⊂ س

٧) {{أ}} ⊆ س

٨) {دَ} ⊆ س

الحل:

١) {أ} ∈ س خطأ والصحيح {أ} ⊂ س

٢) {أ، ب} ⊂ ح (س) خطأ والصحيح {أ، ب} ∈ ح(س)

٣) {∅} ∈ ح (س) خطأ والصحيح {∅} ⊆ ح(س)

٤) {∅} = ∅ خطأ والصحيح {∅} ∋ ∅

٥) {أ} ⊆ ح (س) خطأ والصحيح {أ} ∈ ح (س).

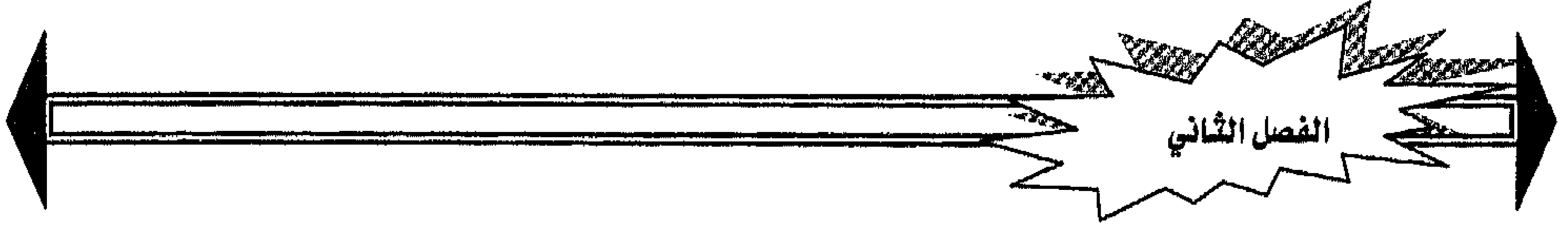
٦) {أ، ب} ⊂ س صحيحة.

٧) {{أ}} ⊆ س خطأ والصحيح {{أ}} ⊆ ح (س).

٨) { دَ } ⊆ س خطأ والصحيح ∉ س.

تعريف (٢-٦-٢):

المجموعة الشاملة والتي يرمز لها بالرمز ك هي المجموعة التي تحتوي كل المجموعات الواردة في مسألة معينة أي إذا كانت أ، ب، جـ مجموعات معينة في دراسة معينة فإن المجموعة الشاملة لتلك المجموعات هي مجموعة التي تحتوي على كل منهم نلحظ أن أصغر مجموعة شاملة لمجموعات ما هي مجموعة اتحاد تلك المجموعات.



مثال (٢-٦-٣):

نفرض أن أ هي مجموعة طلاب قسم الرياضيات بكلية العلوم وأن ب هي مجموعة طلاب الحاسب الآلي وأن جـ هي مجموعة طلاب قسم الفيزياء فإن المجموعة الشاملة لتلك المجموعات يمكن أن تكون على النحو التالي:

$ك_{١}$ = {كل طلاب الكلية}

$ك_{٢}$ = {كل طلاب الجامعة}

رغم إمكانية إيجاد أكثر من مجموعة شاملة لعدد ما من المجموعات إلا أنه يجب اختيار مجموعة شاملة لعدد ما من المجموعات إلا أنه يجب اختيار مجموعة شاملة واحدة كما يجب الثبات على هذا الاختيار في الدراسة الواحدة وسوف يتضح فيما بعد أهمية الثبات على المجموعة الشاملة الواحدة بعد اختبارها.

مثال (٢-٦-٤):

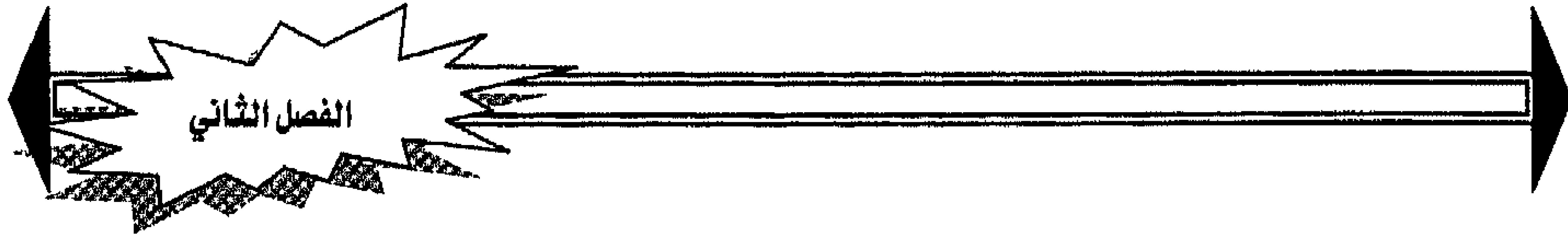
أوجد بعض المجموعات التي تصلح كل منهما كمجموعة شاملة للمجموعات الآتية:

أ= {١، ٢}   ب = {٢، ٣، ٤}   جـ = {٣، ٤، ٥}

الحل:

من الواضح أن $ك_{١}$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} مجموعة شاملة للمجموعات أ، ب، جـ وهي أصغر مجموعة شاملة لتلك المجموعات كما أن $ك_{٢}$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧} هي مجموعة شاملة للمجموعات أ،ب، جـ





أيضاً $ك_3$ = ن مجموعة شاملة للمجموعات ﭐ، ب، جـ ويمكن إيجاد المزيد من المجموعات الشاملة للمجموعات ﭐ، ب، جـ.

ملحوظة:

تتميز المجموعة الشاملة بعدد من المجموعات بما يلي:

(١) المجموعة الشاملة اختيارية بشرط إحتوائها على المجموعات المطروحة في الدراسة.

(٢) المجموعة الشاملة قد تختلف من مسألة لأخرى.

(٣) ثبات المجموعة الشاملة في المسألة الواحدة.

(٤) قيمة انتماء أي عنصر للمجموعة الشاملة تساوي (واحد).

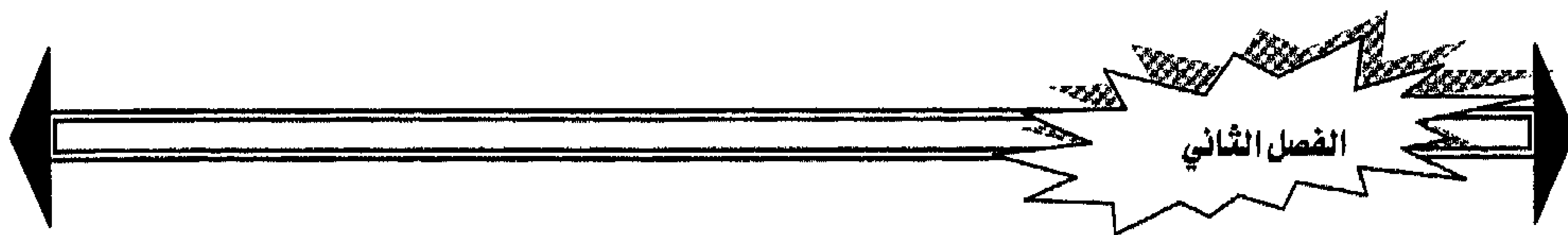
(٢-٧) جبر المجموعات Agebra of sets:

نتعرض الآن لبعض المفاهيم الهامة التي يمكن من خلالها تكوين مجموعة من مجموعات أخرى.

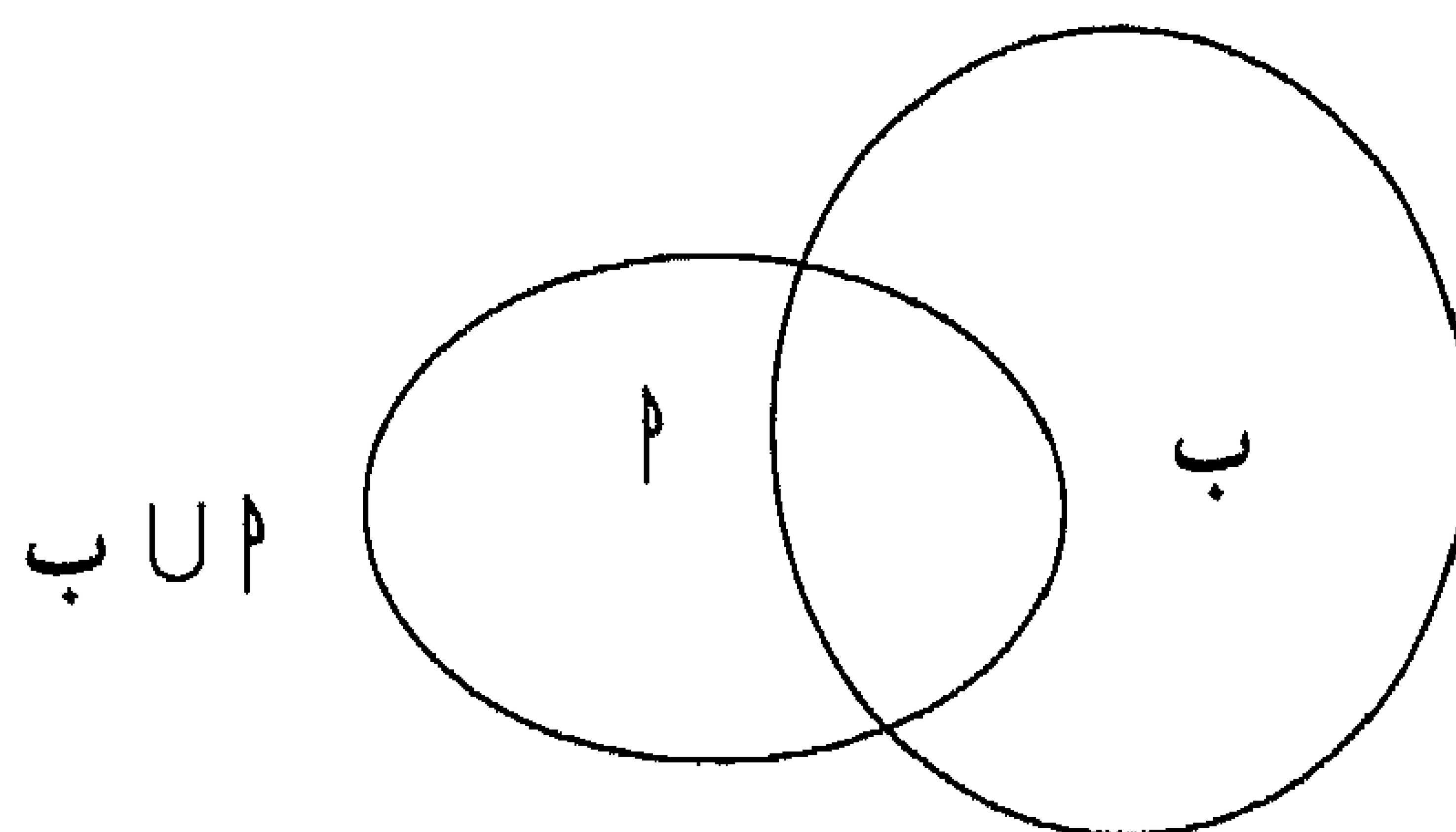
تعريف (٢-٧-١):

مجموعة الاتحاد (Union Set) لمجموعتين غير خاليتين ﭐ، ب والتي نرمز لها بالرمز ﭐ $\cup$ ب تعرف كما يلي:

ﭐ $\cup$ ب = {س: س $\in$ ﭐ $\vee$ س $\in$ ب}.



وهـذا يعـني أن عناصـر مجموعـة الاتحـاد لمجمـوعتين ٱ، ب هـي كـل العناصر المنتمية للمجموعة ٱ أو المجموعة ب أو المجموعتين في الوقت نفسه أنظر للشكل (٥):



شكل (٥)

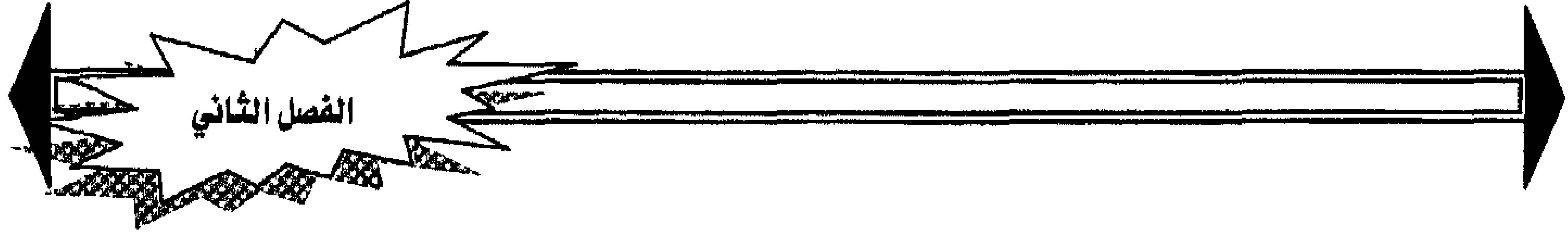
ويمكن بناء جدول الانتماء للمجموعة ٱ ∪ ب كما هو بجدول (١):

ٱ	ب	ٱ ∪ ب
١	١	١
١	صفر	١
صفر	١	١
صفر	صفر	صفر

جدول (١)

لاحظ التطابق بين دالة الفصل "∪" عملية الاتحاد " ∪ "كما نلحظ أيـضاً أن العنصر يأخذ قيمة الانتماء (١) أي ينتمي للمجموعة ٱ ∩ ب اذاً وفقط اذا كان منتمياً لمجموعة واحدة على الاقل من للمجمـوعتين ٱ و ب ودون ذلـك يأخـذ قيمة الانتماء " الصفر" .





أي أن: س ∌ أ ∪ ب ↔ س ∌ أ س ∌ ب.

ملحوظة:

لأي مجموعتين جزئيتين أ، ب من المجموعة الشاملة نلحظ الآتي:

(١) أ ∪ ب = ب ∪ أ

(٢) أ ∪ ∅ = ∅ ∪ أ

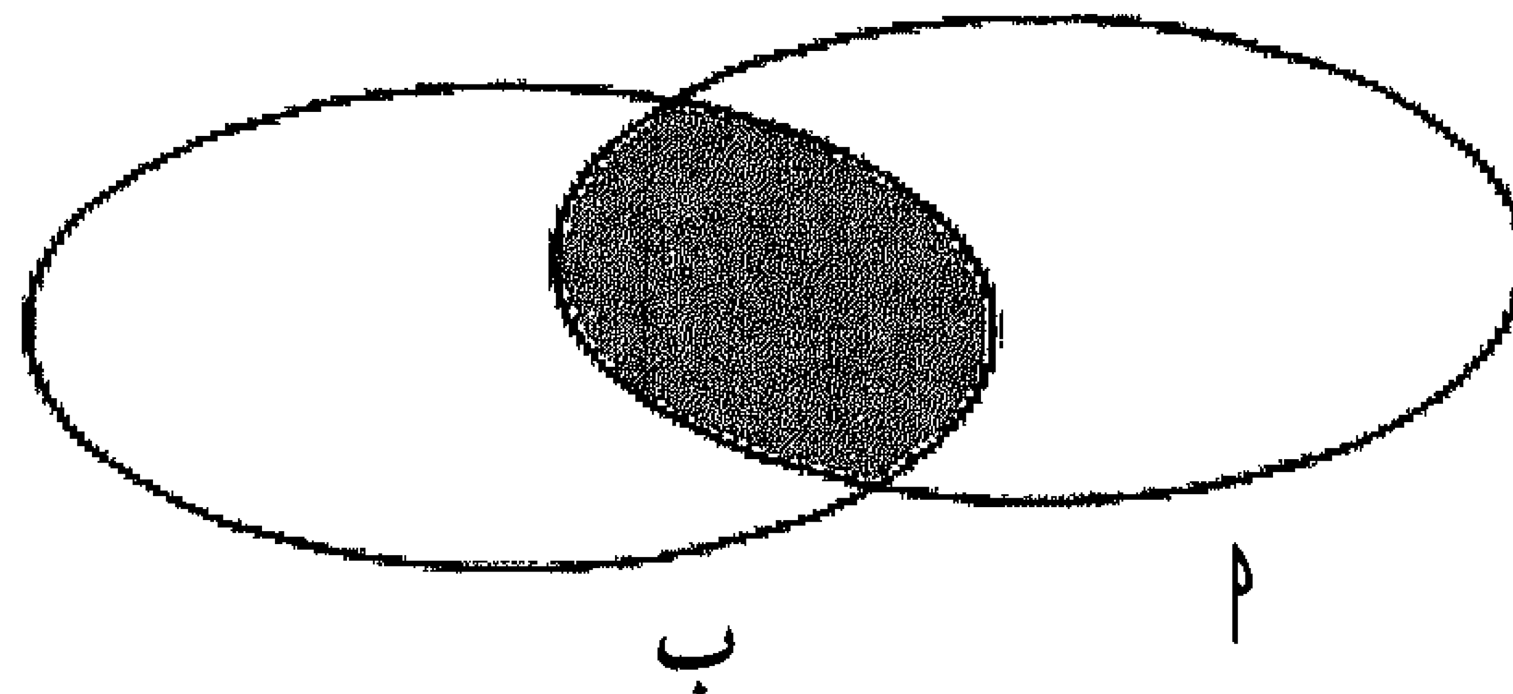
(٣) أ ∪ ك = ك

تعريف (٢-٧-٢):

مجموعـة التقـاطع (intersection set) لمجمـوعتين غـير خـاليتين أ، ب ونرمز لها بالرمز أ ∩ ب تعرف كما يلي:

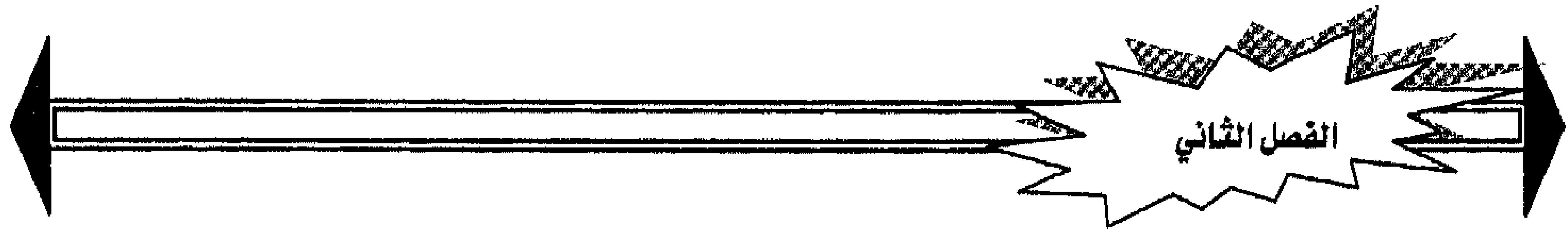
أ ∩ ب = {س: س∋أ ∩ س ∋ ب}

وهذا يعني أن عناصر المجموعة هي تلك العناصر المشتركة بين المجمـوعتين أ، ب انظر الشكل (٦).



شكل (٦)





يمكن بناء جدول الانتماء للمجموعة ﺃ ∩ ب على النحو الآتي:

ﺃ	ب	ﺃ ∩ ب
١	١	١
١	صفر	صفر
صفر	١	صفر
صفر	صفر	صفر

جدول (٢)

لاحظ التطابق بين دالة الفصل " ∧ " وعملية التقاطع "∩" ويلحظ أيضاً أن العنصر يأخذ قيمة الانتماء (١) أي ينتمي للمجموعة ﺃ ∩ب إذا كان منتمياً للمجموعتين في الوقت نفسه أي أن:

س ∈ ﺃ ∩ ب ⇔ س ∈ ﺃ ∩ س ∈ ب.

كما أن: س ∈ ﺃ ∩ ب ⇔ س ∌ ﺃ ∨ س ∌ ب.

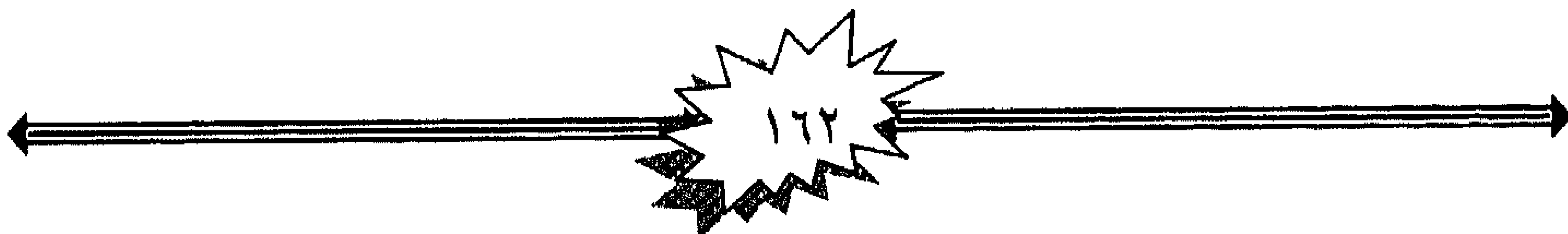
ملحوظة:

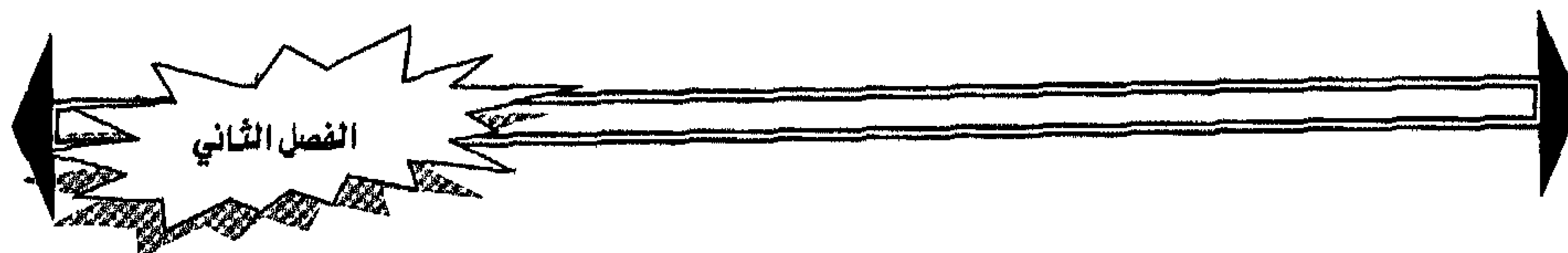
لأي مجموعتين غير خاليتين ﺃ و ب من المجموعة العاملة ك نلحظ الآتي:

(١) ﺃ ∩ ب = ب ∩ ﺃ

(٢) ﺃ ∩ ∅ = ∅ ∩ ﺃ = ∅

(٣) ﺃ ∩ ك= ﺃ





مثال (٢-٧-١):

نفرض أن:

ٱ = {سَ، صَ، عَ }

ب = { ١، سَ، +، صَ } أوجد:

(i) ٱ ∩ ب

(ii) ٱ ∪ ب

الحل:

(i) ٱ ∪ ب ={١، سَ، +، صَ، عَ}

(ii) ٱ ∩ ب = { سَ، صَ }

مثال (٢-٧-٢):

إذا كان ٱ={س∋ ن: ٥ < س < ١٥}ب= {س∋ ن: ٣ ≥ س≥ ١٢ }

أوجد: ٱ ∪ ب، ٱ ∩ ب

الحل:

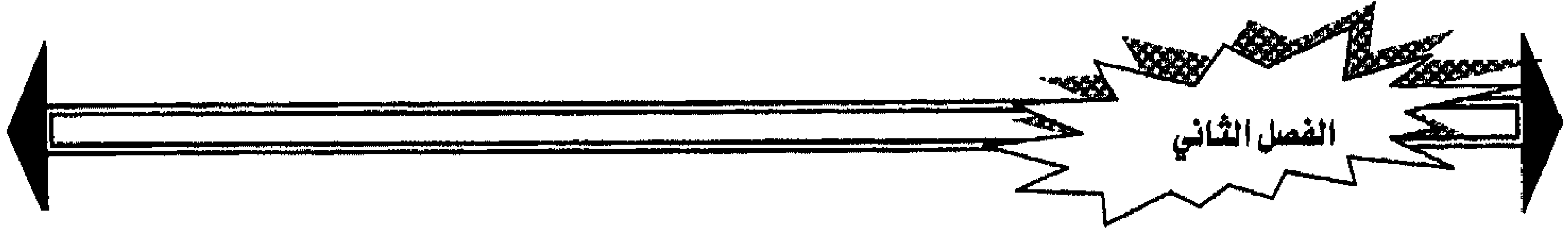
ٱ ∪ ب = {س∋ ن: ٣ ≥ س ≥ ١٥}

ٱ ∩ ب ={س∋ ن: ٥ < س ≥ ١٢}

نظرية (٢-٧-١):

لأي مجموعتين ٱ، ب يتحقق الآتي:





(١) أ ∩ ب ⊆ أ ∪ ب

(٢) أ ⊆ أ ∪ ب، أ ∩ ب ⊆ أ

(٣) إذا أ ⊆ ب ↔ أ ∪ ب = ب، أ ∩ ب = أ

البرهان:

(١) افرض س ∈ أ ∩ ب ⟸ س ∈ أ ∩ س و ب ⟸ س ∈ أ ∪ ب

∴ أ ∩ ب ⊆ أ ∪ ب

(٢) افرض س ∈ أ ⟸ س ∈ أ ∪ ب ⟸ أ ⊆ أ ∪ ب

افرض س ∈ أ ∩ ب ⟸ س ∈ أ ∩ س ∈ ب ⟸ (أ ∩ ب) ⊆ أ

(٣) إذا أ ⊆ ب ⟸ (∀س ∈ أ ← س ∈ ب)

افرض س ∈ أ ∪ ب ⟸ س ∈ أ ∪ س ∈ ب ⟸ س ∈ ب ⟸ أ ∪ ب ⊆ ب

لكن: ب ⊆ أ ∪ ب

∴ أ ∪ ب = ب

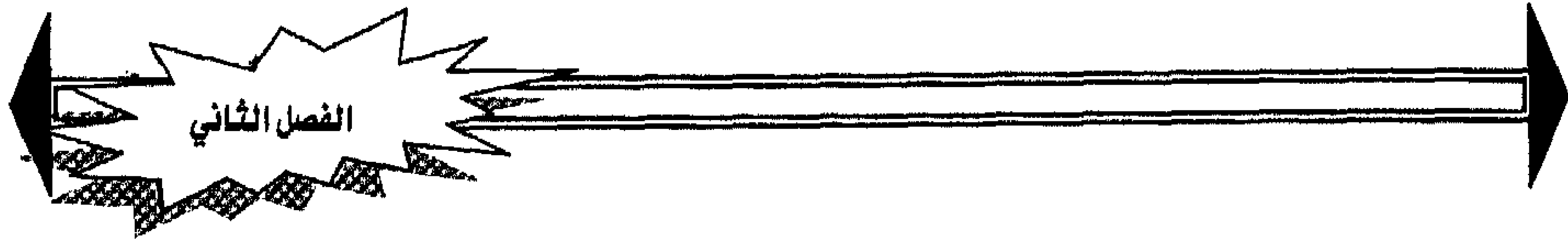
أيضاً: س ∈ أ ⟸ س ∈ ب ⟸ س ∈ أ ∩ ب ⟸ أ ⊆ أ ∩ ب

ونعلم أن: أ ⊆ أ ∩ ب

∴ أ ∩ ب = أ

ومن السهل برهان الاتجاه العكسي.





ملحوظة:

يمكن إثبات تساوي مجموعتين من خلال جداول الانتماء وذلك عند تطابق قيم الانتماء المتناظرة لكليهما.

نظرية (٢-٧-٢):

بفرض أن أ، ب، جـ مجموعات اختيارية إذن:

(١) أ ∪ أ = أ، أ ∩ أ = أ ↔ قانون اللاغو **Indempotent Law**.

(٢) أ ∪ ب = ب ∪ أ ↔ قانون الإبدال **Commutative Law**

(٣) أ ∩ (ب ∩ جـ) = (أ ∩ ب) ∩ جـ

أ ∪ (ب ∪ جـ) = (أ ∪ ب) ∪ جـ ↔ قانون الدمج **Associative Law**

(٤) أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

أ ∪ (ب ∩ جـ) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ جـ) ↔ قانون التوزيع **Distributive Law**

البرهان:

سوف نبرهن أجزاء النظرية بأكثر من طريقة

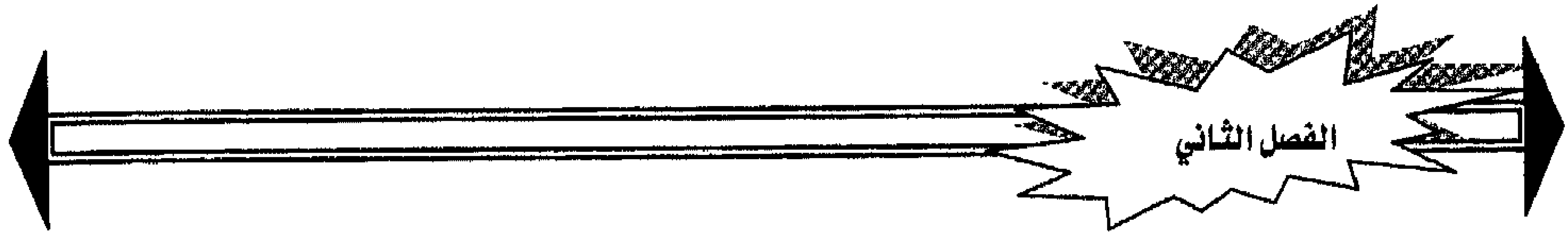
(١) أ ∪ أ = أ، أ ∩ أ = أ

نكون جدول الانتماء لتلك المجموعات كما يلي:

أ	أ ∪ أ	أ ∩ أ
١	١	١
صفر	صفر	صفر

جدول (٣)





بالنظر إلى جدول الانتماء نلحظ تطابق قيم الانتماء المتناظرة للمجموعات الآتية:

أ، أ ∪ أ، أ ∩ أ

∴ أ ∪ أ = أ، أ ∩ أ = أ

(٢) أ ∪ ب = ب ∪ أ

سوف نبرهن هذا الجزء كما يلي:

أ ∪ ب = {س: س ∈ أ v س ∈ ب}

بموجب أن دالة الفصل " v " إبدالية

∴ أ ∪ ب = {س: س ∈ ب v س ∈ أ} = ب ∪ أ

ولأن دالة الوصل أيضاً إبدالية فإنه يمكن إثبات أن أ ∩ ب = ب ∩ أ بالطريقة نفسها.

(٣) أ ∩ (ب ∩ جـ) = (أ ∩ ب) ∩ جـ

أ ∪ (ب ∪ جـ) = (أ ∪ ب) ∪ جـ

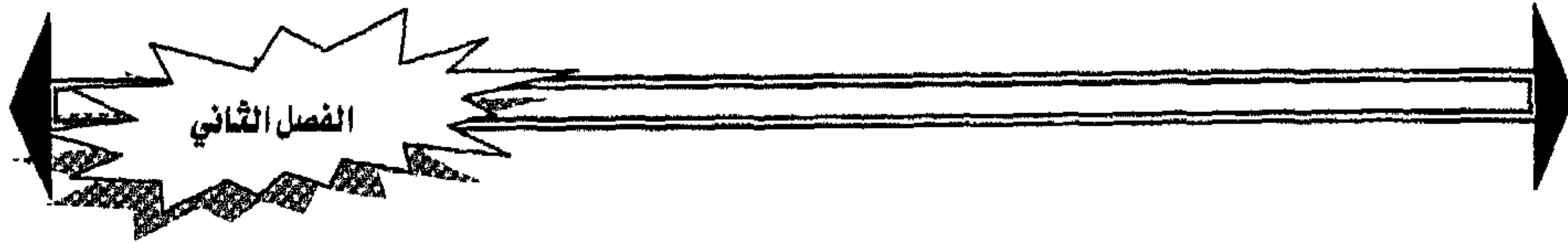
برهان هذا الجزء يمكن أن يكون على النحو الآتي:

أ ∩ (ب ∩ جـ) = {س: س ∈ أ Λ س ∈ (ب ∩ جـ)}

= {س: س ∈ أ Λ (س ∈ ب Λ س ∈جـ)}

وبموجب أن دالة الوصل " Λ " دامجة.





∴ أ ∩ (ب ∩ جـ) = {س: (س ∈ أ Λ س ∈ ب) Λ س ∈ جـ}

= {س: س ∈ أ ∩ ب Λ س ∈ جـ}

= {س: س ∈ (أ ∩ ب) Λ جـ}

= (أ ∩ ب) Λ جـ

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

أ ∪ (ب ∪ جـ) = (أ ∪ ب) ∪ جـ

(٤) أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

أ ∪ (ب ∩ جـ) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ جـ)

أما هذا الجزء فسوف يبرهن من خلال بناء جدول الانتماء للمجموعة أ ∩ (ب ∪ جـ) والمجموعة (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ) والتي سوف نرمز لها بالرمز α انظر للجدول (٤):

أ	ب	جـ	أ ∩ ب	أ ∩ جـ	ب ∩ جـ	أ ∩ (ب ∪ جـ)	α
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	٠	١	١	١
١	٠	١	٠	١	١	١	١
٠	١	١	٠	٠	١	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠	١	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

جدول (٤)



وبالنظر إلى العمودين الأخيرين بالجدول نلحظ أن قيم الانتماء المتناظرة للمجموعين:

(أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)، أ ∩ (ب ∪ جـ)

∴ أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (ب ∩ جـ)

وبالمثل يمكن إثبات أن: أ ∪ (ب ∩ جـ) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ جـ).

مثال (٢-٧-٣):

بفرض أن أ، ب، جـ ثلاث مجموعات غير خالية ناقش صحة العبارة التالية:

أ ∪ ب ⊆ جـ ∪ ب ⟺ أ ⊆ جـ

البرهان:

الاتجاه ⟸: نفرض أن أ ⊆ جـ أي أن ∀ س ∈ أ ⟸ س ∈ جـ

∴ أ ∪ ب ⊆ جـ ∨ ب

وذلك لأن:

س ∈ أ ∪ ب ⟸ س ∈ أ ∨ س ∈ ب ⟸ س ∈ جـ ∨ س ب ⟸ س ∈ جـ ∨ ب

الاتجاه ⟹: العلاقة ليست صحيحة عامة في هذا الاتجاه كما يتضح لنا في المثال التالي:

مثال (٢-٧-٤):

نفرض أن: أ = { ٢، ٣، ٤}، ب = { ١، ٢ } جـ = { ٣، ٤، ٥ }

ومن السهل ملاحظة أن:

أ ∪ ب = { ١، ٢، ٣، ٤ } ⊆ جـ ∪ ب = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

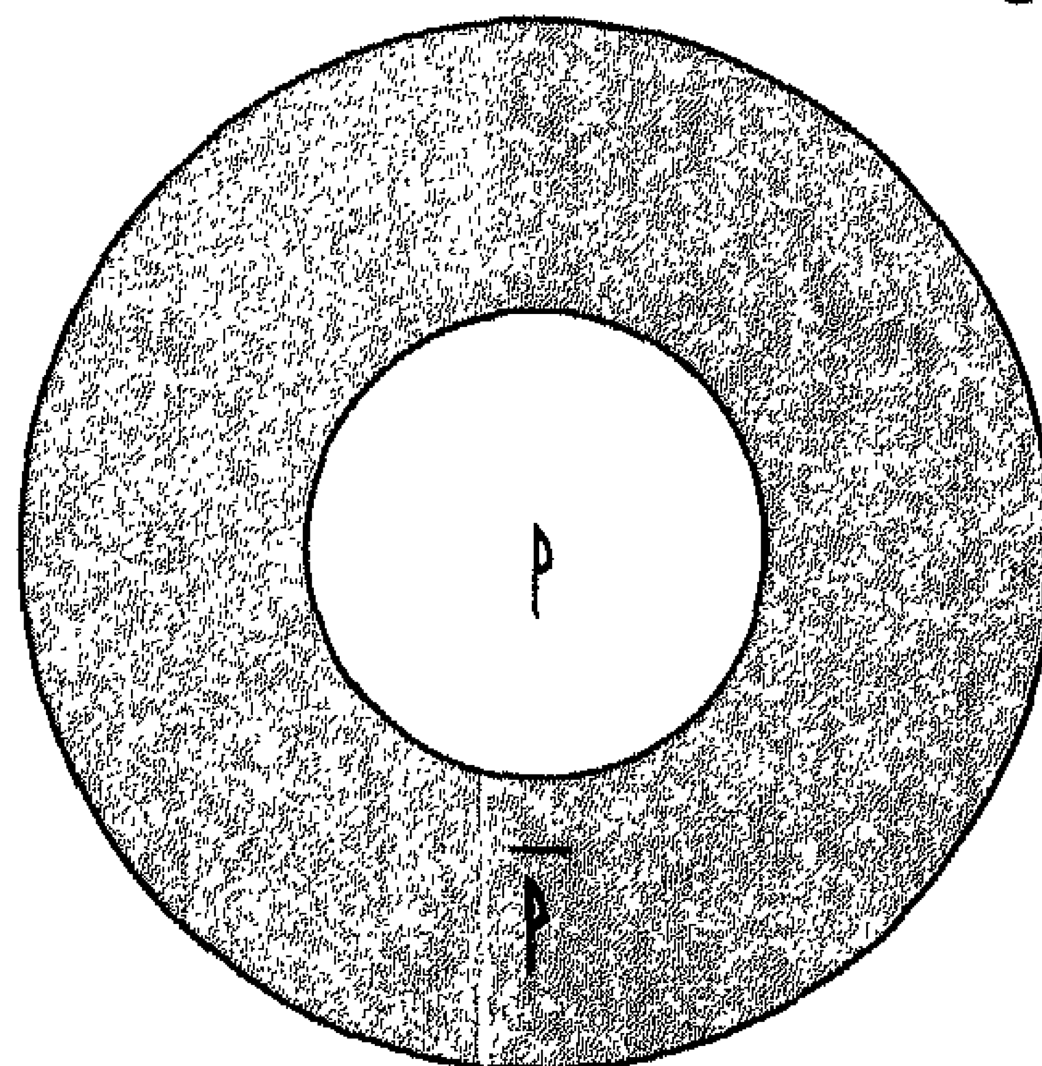
مع أن أ ⊈ جـ.

(٢-٨) قيمة مجموعة (Complement of asset)

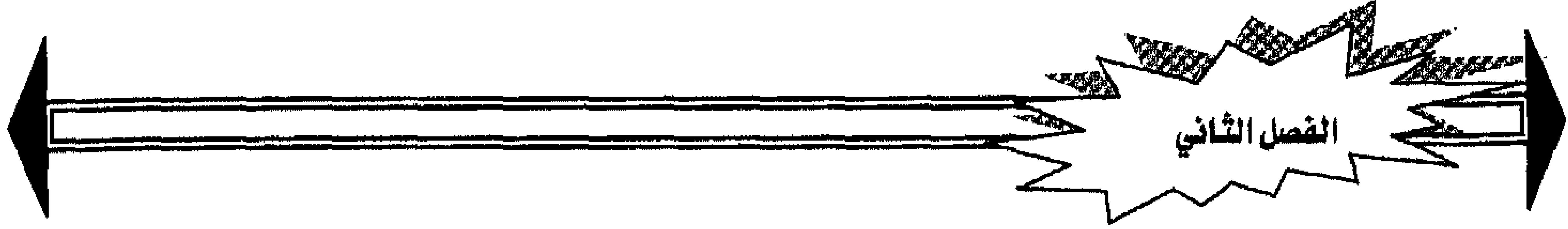
تعريف (٢-٨-١):

نفرض أن أ مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة الشاملة ك متممة (complement) المجموعة أ بالنسبة للمجموعة الشاملة والتي يرمز لها بالرمز ك هي مجموعة كل عناصر غير منتمية للمجموعة أ أي أن:

أ = {س ∈ ك: س ∈ أ}



شكل (٧)



مثال (٢-٨-١):

نفرض أن أ = {١، ٥، ٦ }، ب ={ ٢، ٣، ٤ }، ك = ن

∴ أ̄ = {٢، ٣، ٤، ٧، ٨.... }، ب̄ ={ ١، ٥، ٦.... }.

ملحوظة:

إذا كانت درجة انتماء العنصر س للمجموعة أ = ١ فإن درجة انتماء س للمجموعة̄ = صفر وعلى ذلك يمكن بناء جدول الانتماء لمتممة المجموعة على النحو الآتي:

أ	أ̄
١	صفر
صفر	١

جدول (٥)

ونلحظ تطابق جدول انتماء بجدول صدق ~ أ.

نظرية (٢-٨-١):

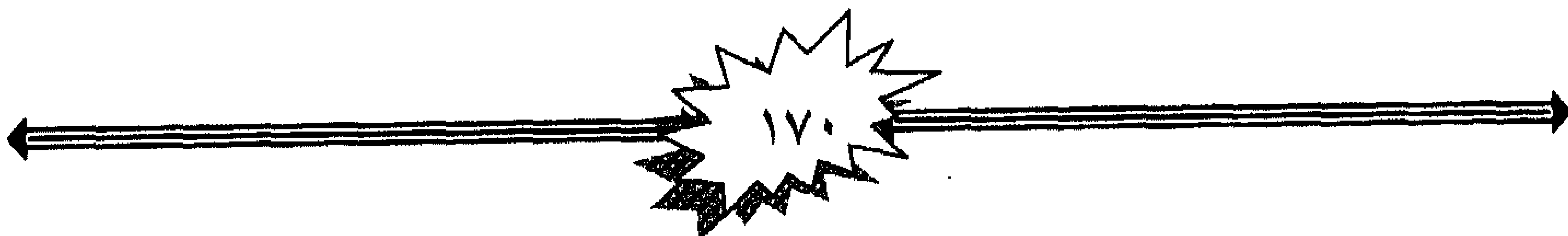
بفرض أن أ، ب مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة فإن:

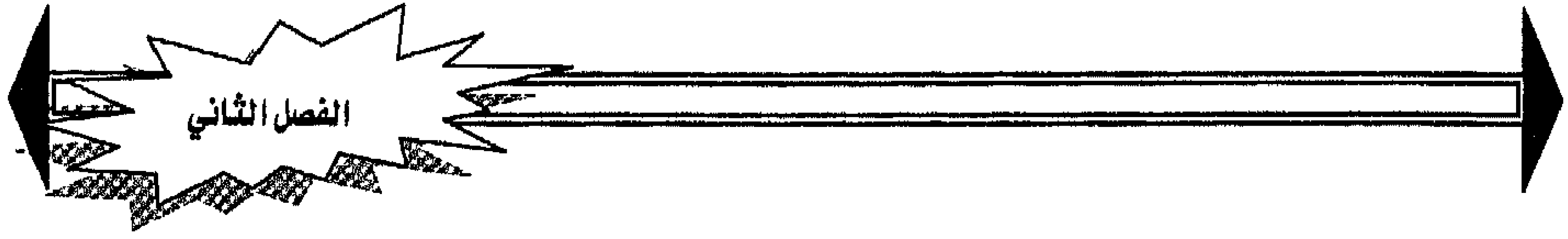
(١) ك̄ = Φ، $\overline{\Phi}$ = ك

(٢) $\overline{(\overline{أ})}$ = أ

(٣) أ ∩ أ̄ = Φ

(٤) أ ∪ أ̄ = ك





(٥) إذا $أ \subseteq ب \leftrightarrow \bar{ب} \subseteq \bar{أ}$

(٦) $\overline{(أ \cup ب)} = \bar{أ} \cap \bar{ب}$

(٧) $\overline{(أ \cap ب)} = \bar{أ} \cup \bar{ب}$

قانون دي مورغان

البرهان:

(١) $\bar{ك} = \{ س \in ك : س \notin ك \} = \Phi$

$\bar{\Phi} = \{ س \in ك : س \not\in \Phi \} = ك$

(٢) سوف نبرهن أن: $\bar{\bar{أ}} = أ$ عن طريق جدول الانتماء الآتي:

أ	$\bar{أ}$	$\bar{\bar{أ}}$
١	صفر	١
صفر	١	صفر

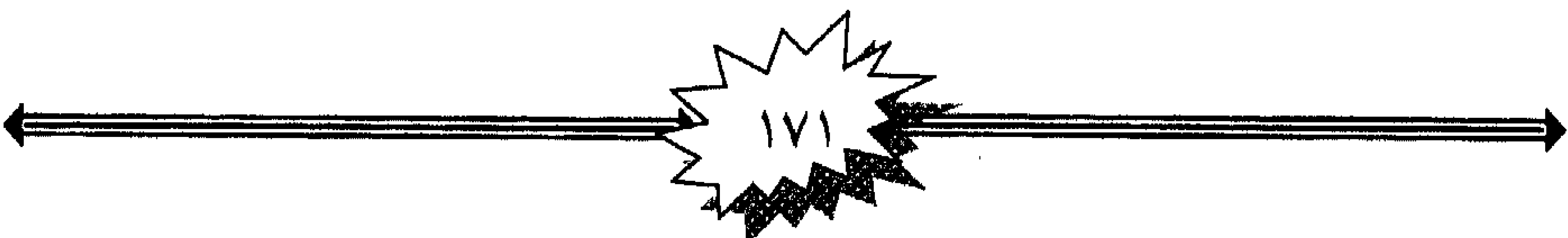
جدول (٦)

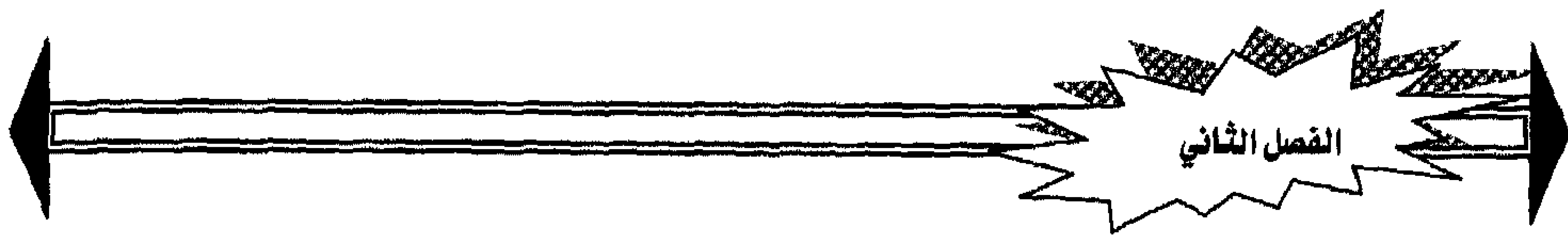
واضح أن: $\bar{\bar{أ}} = أ$ وذلك لتطابق قيم الانتماء المتناظرة في العمودين الأول والأخير بجدول الانتماء ن ومن جدول الانتماء الآتي:

أ	$\bar{أ}$	$أ \cap \bar{أ}$	$أ \cup \bar{أ}$
١	صفر	صفر	١
١	صفر	صفر	١
صفر	١	صفر	١
صفر	١	صفر	١

جدول (٧)

نلحظ ما يلي:





(i) إن قيم الانتماء للمجموعة $\text{أ} \cap \bar{\text{أ}}$ كل منهـا أصـفار أي أن $\text{أ} \cap \bar{\text{أ}} = \Phi$.

(ii) وإن قيم الانتماء للمجموعة $\text{أ} \cup \bar{\text{أ}}$ كل منها يساوي ١ أي أن: $\text{أ} \cup \bar{\text{أ}} =$ ك.

وبالتالي نصل إلى برهان الخاصتين (٣)،(٤):

(٥) إذا $\text{أ} \subseteq \text{ب}$ $\forall$ س $\in \Longleftarrow$ س ← س $\not\ni$ أ

إذا س $\not\ni$ $\bar{\text{ب}}$ $\Longleftarrow$ س $\not\ni$ ب ← س $\not\ni$ أ ← س $\not\ni$ $\bar{\text{أ}}$

$\therefore$ $\bar{\text{ب}} \subseteq \bar{\text{أ}}$.

أي أن $\text{أ} \subseteq \text{ب} \leftarrow \bar{\text{ب}} \subseteq \bar{\text{أ}}$.

الاتجاه العكسي $\text{أ} \subseteq \text{ب} \leftarrow \bar{\text{ب}} \subseteq \bar{\text{أ}}$.

إذا: $\bar{\text{ب}} \subseteq \bar{\text{أ}} \leftarrow$ ($\forall$ س $\in$ $\bar{\text{أ}}$ ← س $\subseteq$ $\bar{\text{ب}}$).

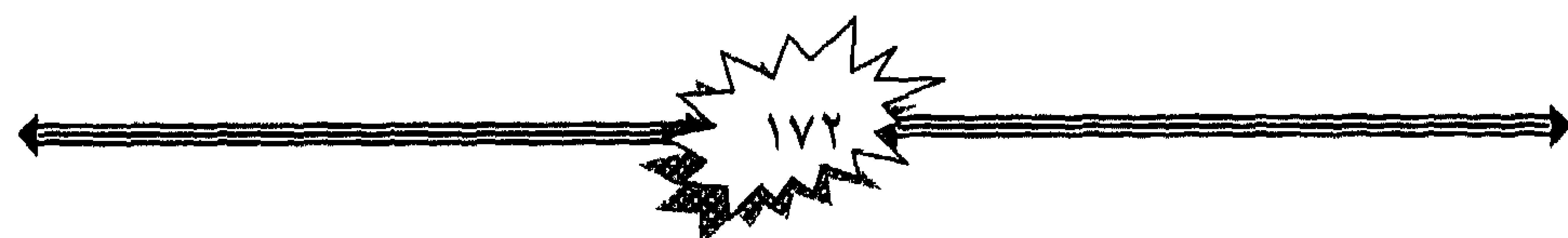
إذا: س $\in$ أ ← س $\not\ni$ $\bar{\text{أ}}$ $\Longleftarrow$ س $\not\ni$ $\bar{\text{ب}}$ ← س $\not\ni$ ب.

$\therefore$ $\text{أ} \subseteq \text{ب}$.

أي أن: $\bar{\text{ب}} \subseteq \bar{\text{أ}} \leftarrow \text{أ} \subseteq \text{ب}$.

من (i)، (ii) نحصل على: $\text{أ} \subseteq \text{ب} \leftrightarrow \bar{\text{ب}} \subseteq \bar{\text{أ}}$.

لإثبات الخاصتين ٦، ٧ (قانوني دي مورجان) سـوف نرمـز للمجموعـة ($\text{أ} \cup \text{ب}$) بـالرمز $\propto$ وللمجموعـة $\overline{(\text{أ} \cup \text{ب})}$ بـالرمز β وللمجموعـة $\bar{\text{أ}} \cap \bar{\text{ب}}$ بالرمز γ وللمجموعة $\overline{(\text{أ} \cap \text{ب})}$ بالرمز في جدول الانتماء التالي:



أ	ب	أ	ب	أ ∪ ب	أ ∩ ب	α	β	γ	δ
صفر	١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	صفر	صفر
١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	صفر	١	١
١	١	١	صفر	١	صفر	صفر	صفر	١	١
١	صفر	١	١	صفر	صفر	١	١	١	١

جدول (٨)

نلحظ من قيم الانتماء بأعمدة الجدول أن $\overline{(\text{أ} \cup \text{ب})} = \overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$ وذلك لتطابق قيم الانتماء المتناظرة لهما وللسبب نفسه نجد أن:

$\overline{(\text{أ} \cap \text{ب})} = \overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}}$

ويمكن إثبات الخاصيتين ٦، ٧ من النظرية السابقة بطريقة أخرى كما يلي:

$\overline{(\text{أ} \cap \text{ب})} = \{\text{س} \in \text{ك}: \text{س} \notin (\text{أ} \cap \text{ب})\}$.

$= \{\text{س} \in \text{ك}: \text{س} \notin \text{أ} \text{ و س} \notin \text{ب})\}$.

$= \{\text{س} \in \text{ك}: \text{س} \in \overline{\text{أ}} \text{ و س} \in \overline{\text{ب}})\}$.

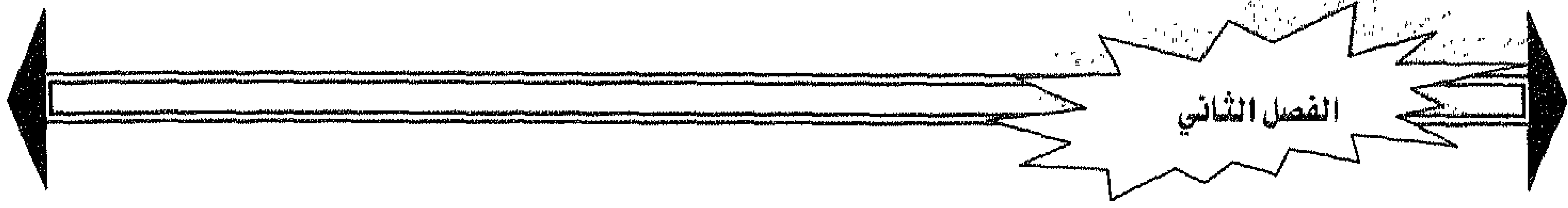
$= \{\text{س} \in \text{ك}: \text{س} \in (\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}})\}$

$\therefore = (\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}})$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات الفقرة الثانية.

مثال (٢-٨-٢):

بفرض أن أ، ب مجموعتان جزئيتان من المجموعات الشاملة ناقش صحة العبارة التالية:



البرهان:

الاتجاه ⟸: نفرض أن $\bar{أ}$= ب

∴ أ ∩ ب = أ ∩ $\bar{أ}$ = Φ

وعلى هذا فإن العلاقة في الاتجاه ⟸ صحيحة

الاتجاه⟹ العلاقة السابقة في هذا الاتجاه ليس صحيحة عامة كما سيتضح في المثال التالي

مثال (٢-٨-٣):

نفرض أن: ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}.

أ = {١،٢}

ب = {٣،٤} واضح أن أ ∩ ب = Φ مع أن $\bar{أ}$= {٣،٤،٥}

مثال (٢-٨-٤):

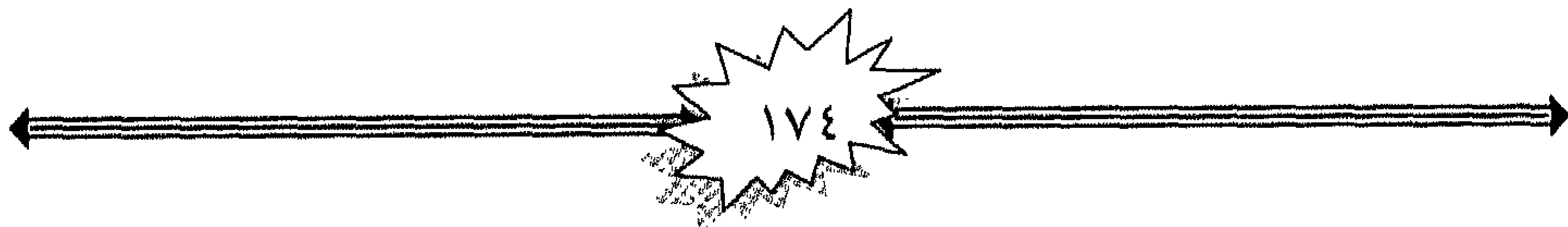
يفرض أن، ب مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة ك ناقش صحة العلاقة الآتية:

أ ∪ ب = ك ↔ $\bar{أ}$ = ب

البرهان:

الاتجاه ⟸ نفرض أن $\bar{أ}$ = ب

∴ أ ∪ ب = أ ∪ $\bar{أ}$ = ك



∴ العلاقة في هذا الاتجاه صحيحة.

الاتجاه ⟸ العلاقة السابقة ليست صحيحة عامة في هذا الاتجاه كما سيتضح من المثال التالي:

مثال (٢-٨-٥):

نفرض أن ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

أ = {١، ٢، ٣}

ب = {٢، ٣، ٤، ٥}

واضح أن: أ ∪ ب = ك:

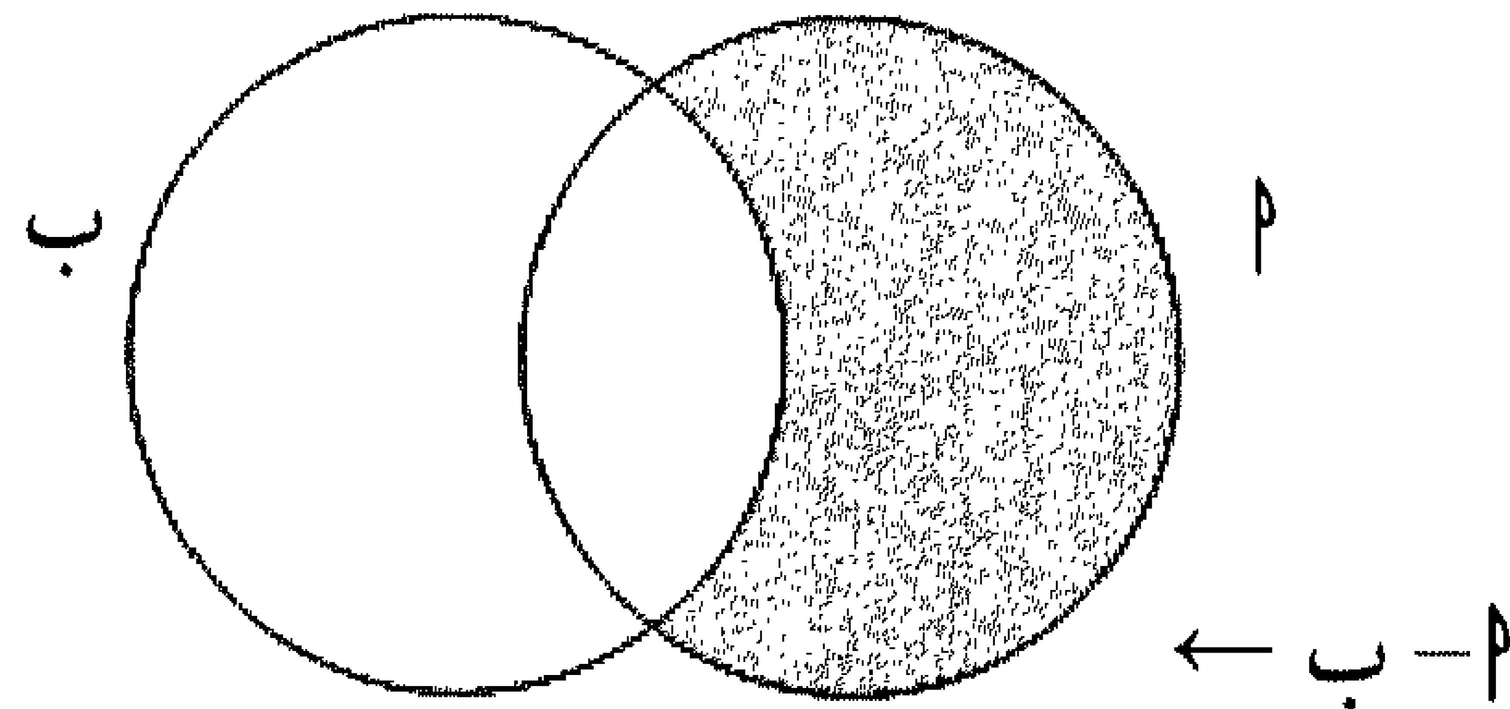
مع أن: أ = {٤، ٥} ≠ ب.

(٢-٩) الفرق والفرق التناظري:

تعريف (٢-٩-١):

يعرف الفرق بين المجموعتين الجزئيتين أ، ب والذي يرمز له بالرمز أ – ب أو أ|ب كما يلي:

أ – ب = { س: س ∈ أ Λ س ∈ ب}



شكل (٨)

أ	ب	أ – ب	ب – أ
١	١	٠	٠
١	٠	١	٠
٠	١	٠	١
٠	٠	٠	٠

جدول (٩)

واضح من الجدول أن عملية الفرق ليست إبدالية حيث:

أ – ب ≠ ب – أ.

مثال (٢-٩-١):

بفرض أن: ب = {س ∋ ح: ١ ≥ س < ١٠}.

أ = {س ∋ ح: س ≤٣}.

∴ أ – ب = {س ∋ ح: س ≥ ١٠}.

ب – أ = {س ∋ ح: ١ ≤ س > ٣}.

نظرية (٢-٩-١):

بفرض أن أ، ب مجموعتان جزئيتان أثبت أن:

i) أ – ب̅ = أ ∩ ب

ii) أ̅ – ب̅ = ب – أ

البرهان:

i) $\text{أ} - \overline{\text{ب}} = \{\text{س}: \text{س} \in \text{أ} \wedge \text{س} \notin \overline{\text{ب}}\}$

$= \{\text{س}: \text{س} \in \text{أ} \wedge \text{س} \in \text{ب}\}$

$= \{\text{س}: \text{س} \in \text{أ} \cap \text{ب}\}$

$= \text{أ} \cap \text{ب}$

ii) $\overline{\text{أ}} - \overline{\text{ب}} = \{\text{س}: \text{س} \in \overline{\text{أ}} \wedge \text{س} \notin \overline{\text{ب}}\}$

$= \{\text{س}: \text{س} \in \text{أ} \wedge \text{س} \in \overline{\text{ب}}\}$

$= \{\text{س}: \text{س} \in (\text{أ} - \text{ب})\}$

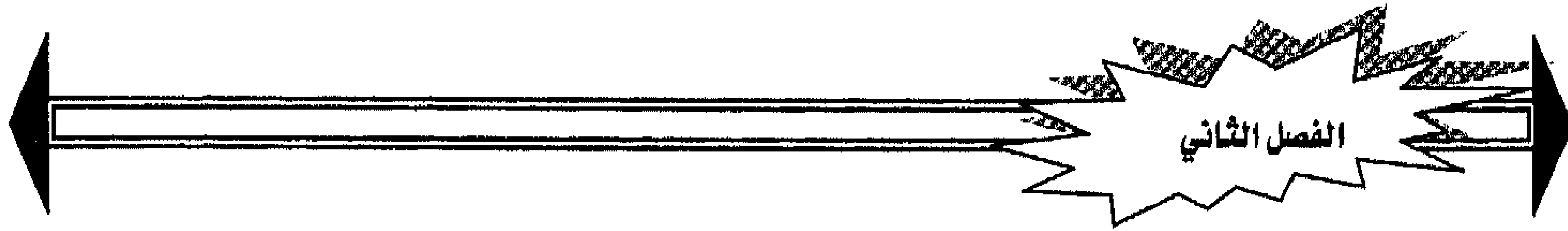
$= \text{أ} - \text{ب}$

برهان آخر:

يمكن إثبات النظرية السابقة عن طريقة بناء جدول الانتماء لتلك المجموعة كما يلي:

أ	ب	$\overline{\text{أ}}$	$\overline{\text{ب}}$	$\text{أ} - \overline{\text{ب}}$	$\text{أ} \cap \text{ب}$	$\overline{\text{أ}} - \overline{\text{ب}}$	$\text{ب} - \text{أ}$
١	١	٠	٠	١	١	٠	٠
١	٠	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	٠	١	١
٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠

جدول (١٠)

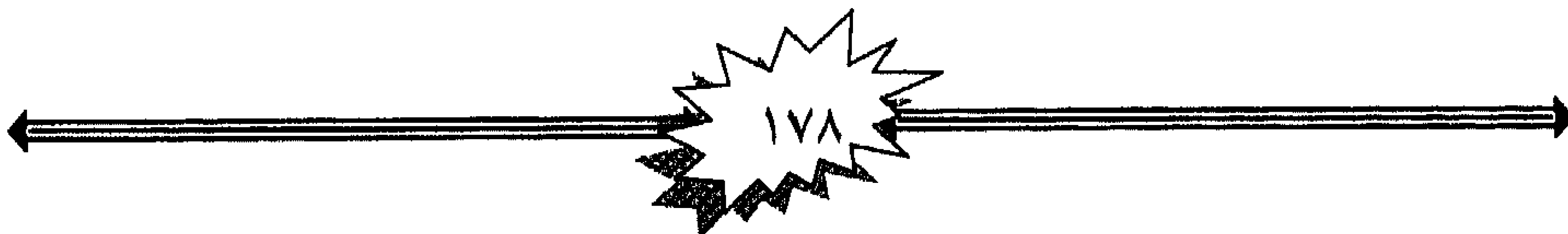


نلحظ من جدول الانتماء السابق أن أ − ب̅ = أ ∩ ب وذلك لتطابق قيم الانتماء المتناظرة لكل من أ ∩ ب، أ − ب̅ كما نلحظ أن أ̅ − ب̅ = ب − أ وذلك لتطابق قيم الانتماء المتناظرة لهما.

لاستنتاجات المزيد من العلاقات التي تربط عملية الفرق بعمليتي الاتحاد والتقاطع نعرض جدول الانتماء الآتي وللاختصار نرمز للمجموعة أ ∩ ب بالرمز α والمجموعة أ ∩ ج بالرمز β والمجموعة أ ∪ ج بالرمز" γ والمجموعة أ ∪ ج بالرمز η والمجموعة ب ∪ ج بالرمز λ والمجموعة ب ∩ ج بالرمز" μ والمجموعة أ − ب بالرمز σ والمجموعة ب − أ بالرمز ح والمجموعة أ − ج بالرمز ρ والمجموعة ج − أ بالرمز ξ وأخيراً المجموعة ب − ج بالرمز ζ
"

أ	ب	ج	α	β	γ	η	λ	μ	σ	τ	ρ	ξ	ζ
١	١	١	١	١	١	١	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
١	١	٠	١	٠	١	١	١	٠	٠	٠	١	٠	١
١	٠	١	٠	١	١	١	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	٠	٠	١	١	١	١	٠	١	٠	١	٠
١	٠	٠	٠	٠	١	١	٠	٠	١	٠	١	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠	١	٠	١	٠	٠	١	٠	٠	١
٠	٠	١	٠	٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠	١	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١

جدول (١١)



أولاً: نستخلص الجدول الآتي (١١):

أ ∩ (ب – جـ)	(أ ∩ ب) – (أ ∩ جـ)	(ب – جـ) ∩ أ	(أ ∩ ب) – جـ
٠	٠	٠	٠
١	١	١	١
٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠
	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠

جدول (١٢)

يتضح من الجدول السابق:

أ ∩ (ب – جـ) = (أ ∩ ب) – (أ ∩ جـ) = (أ ∩ ب) – جـ

وأن (ب – جـ) ∩ أ = (ب ∩ أ) – (جـ ∩ أ)

أي أن عملية التقاطع توزيعية على عملية الفرق.

ثانياً: نستخلص من جدول الانتماء الآتي من الجدول (١١) مع ملاحظة أنه بناء على الرموز المتفق عليها في الجدول سوف يكون:

أ ∪ (ب – جـ) = أ ∪ ξ

أ – (ب ∪ جـ) أ – λ

(ب ∪ جـ) – A = λ – أ

(أ ∪ ب) – (أ ∪ جـ) = $\gamma - \eta$

(أ – ب) ∪ (ب – جـ) = $\delta \cup \zeta$

(ب – أ) ∪ (جـ – أ) = ح ∪ ζ

ζ U ح	A – λ	ζ - δ	λ A	η - γ	ξ U أ
٠	٠	٠	٠	٠	١
٠	٠	١	٠	٠	١
٠	٠	١	٠	٠	١
١	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	١
١	١	١	٠	١	١
١	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠

جدول (١٣)

نلحظ من الجدول السابق أن:

أ U (ب - جـ) ≠ (أ U ب) - (أ U جـ)

(ب - جـ) U أ = أ U (ب - جـ) ≠ (ب U أ) - (جـ U أ)

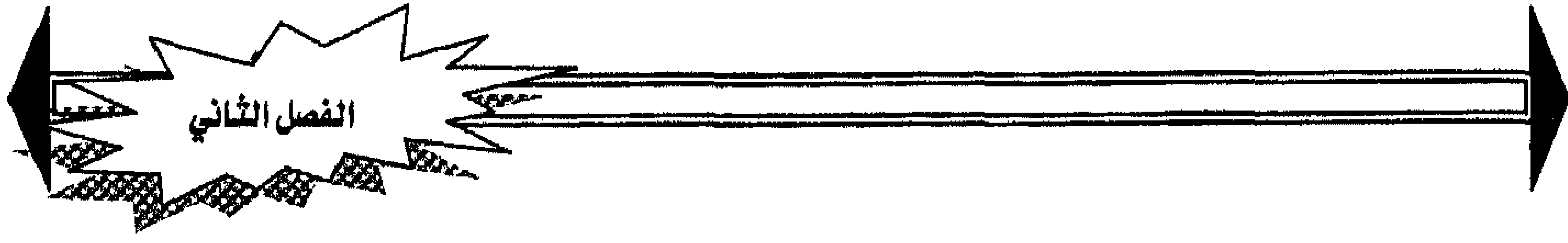
أي أن عملية الاتحاد ليست توزيعية على عملية الفرق.

كما نلاحظ أن:

أ - (ب - جـ) ≠ (أ - ب) U (أ - جـ)

(ب U جـ) – أ = (ب - أ) U (جـ - أ)

أي أن عملية الفرق توزيعية على عملية الاتحاد من الناحية اليمنى فقط.



ثالثاً: نستخلص جدول الانتماء الآتي من الجدول (١١) وللاختصار وبناءً على الرموز المتفق عليها سيكون:

أ - (ب ∪ ج) = أ − λ

أ - (ب ∩ ج) = Φ − μ

(أ - ب) − ج = δ - ج

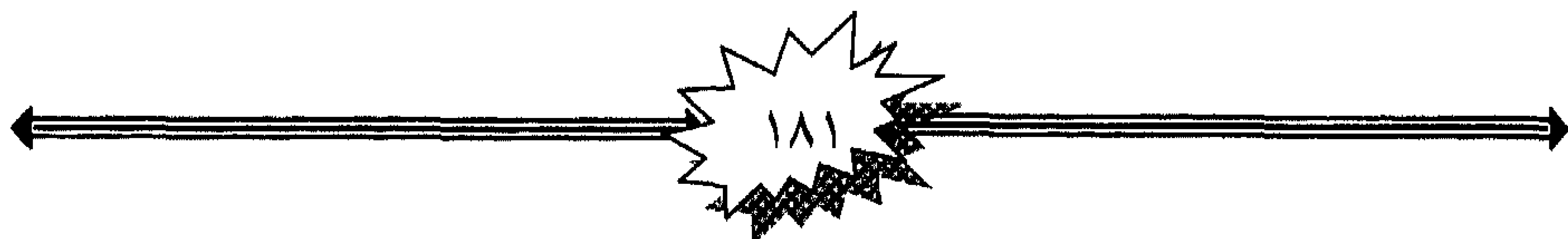
(أ - ب) ∩ (أ - ج) = δ ∩ ρ

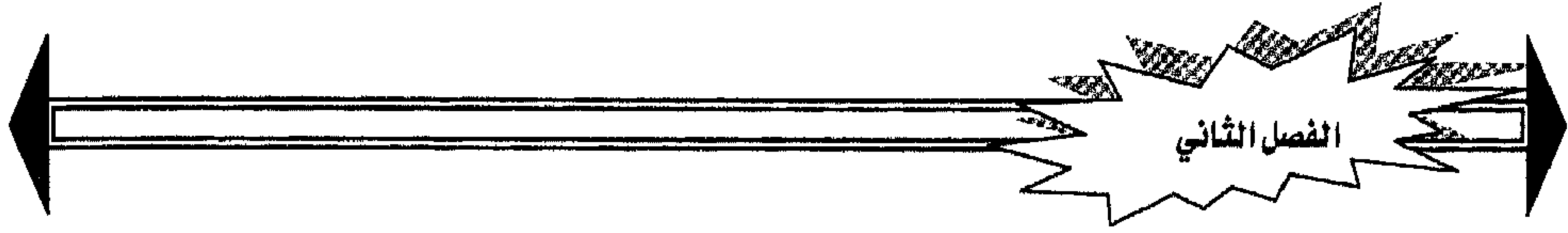
(أ - ب) ∪ (أ - ج) = δ ∪ ρ

(أ - ج) − ب = ρ − ب

μ - λ	δ - ρ	أ - M	δ ∪ ρ	δ ∪ ج	ρ − ب
٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	١	٠	٠
	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠

جدول (١٤)





نلحظ من الجدول السابق أن:

أ - (ب ∪ جـ) = (أ - ب) ∩ (أ - جـ)

أ - (ب ∩ جـ) = (أ - ب) ∪ (أ - جـ)

أ - (ب ∪ جـ) = (أ - ب) - جـ = (أ - جـ) - ب

رابعاً: الطريقة نفسها يمكن استخلاص جدول انتماء من جدول (١١) يوضح لنا أن:

(ب ∪ جـ) - أ = (ب - أ) ∪ (جـ - أ)

(ب ∩ جـ) - أ = (ب - أ) ∩ (جـ - أ)

أي أن عملية الفرق توزيعية من الناحية اليمنى على كل من عملية الاتحاد وعملية التقاطع.

❖ ملحوظة:

(١) من السهل إثبات إحدى العلاقات السابقة بالطريقة التقليدية فعلى سبيل المثال سوف نقوم بإثبات أن:

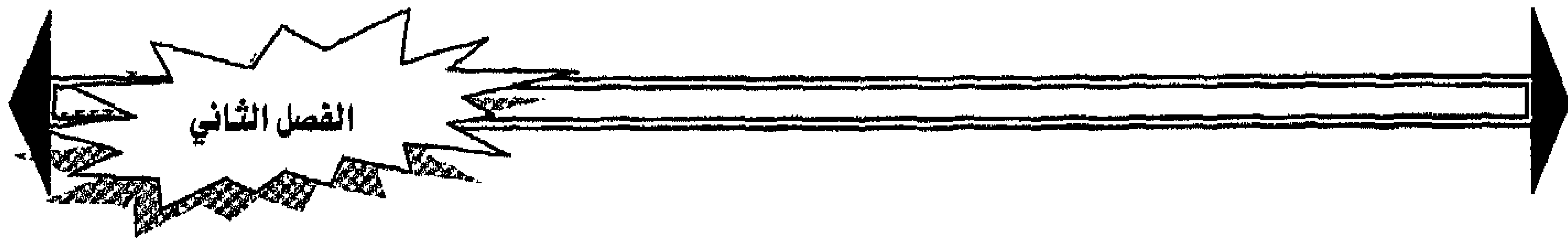
أ - (ب ∩ جـ) = (أ - ب) ∪ (أ - جـ).

وذلك على النحو التالي:

أ - (ب ∩ جـ) = {س: س ∈ أ و س ∉ (ب ∩ جـ)}.

= {س: س ∈ أ و (س ∉ ب أو س ∉ جـ)}.





= {س: (س ∈ ا و س ∉ ب) أو (س ∈ ا أو س ∉ جـ)}.

= {س: س ∈ (ا – ب) أو س ∈ (ا - جـ)}.

= {س: س ∈ (ا – ب) ∪ (ا - جـ)}.

= (ا – ب) ∪ (ا - جـ).

(٢) بالنسبة للعلاقات غير المحققة من خلال جداول الانتماء يمكن أن توضح من خلال أمثلة عكسية فمثلاً المثال الآتي يوضح:

ا ∪ (ب - جـ) ≠ (ا ∪ ب) – (ا ∪ جـ).

مثال (٢-٩-٢):

بفرض أن:

ا = {ا، ب}

ب = {جـ ، د}

جـ = {β}

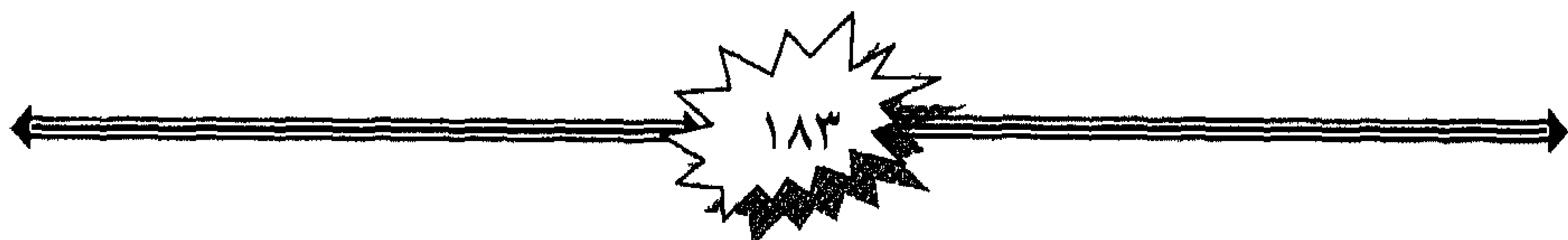
١) ا ∪ (ب - جـ) = {ا، ب، جـ ، د}.

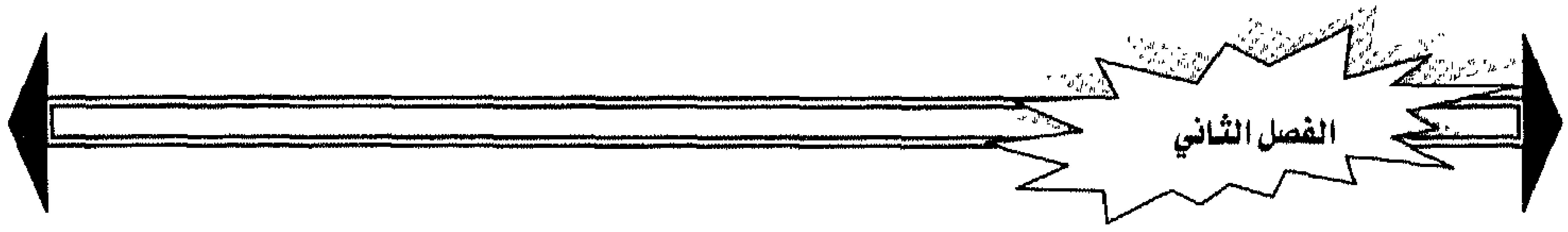
وأن:

٢) (ا ∪ ب) - (ا ∪ جـ) = {جـ ، د}.

من (١) و(٢) يتضح لنا أن:

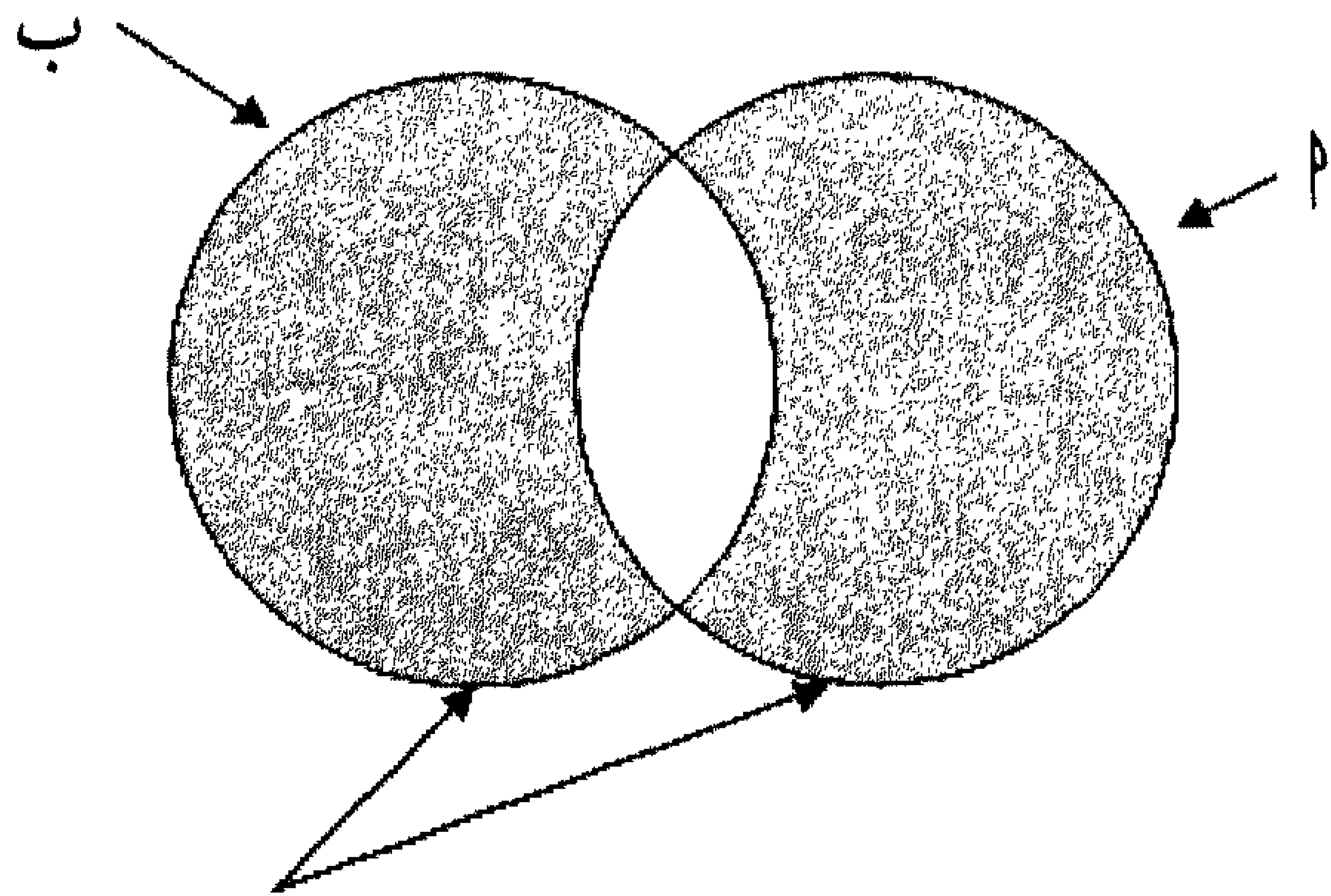
ا ∪ (ب - جـ) ≠ (ا ∪ ب) – (ا ∪ جـ).





تعريف (٢-٩-٢):

الفرق التناظري للمجموعتين ﺃ، ب والذي نرمز له بالرمز ﺃ Δ ب يعرف كما يلي:



ﺃ Δ ب= (ﺃ - ب)$\cup$(ب- ﺃ)

شكل (٩)

جدول الانتماء للفرق التناظري للمجموعتين ﺃ و ب هو كما يلي:

ﺃ	ب	ﺃ - ب	ب - ﺃ	ﺃ Δ ب = (ﺃ - ب) $\cup$ (ب - ﺃ)
١	١	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	١
٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	١

جدول (١٦)



وحيث أن عملية الاتحاد إبدالية فإن عملية الفرق التناظري إبدالية أيضاً أي أن:

أ Δ ب = ب Δ أ.

*** ملحوظة:**

نلحظ من جدول (١٦) أن قيمة الانتماء للفرق التناظري تساوي ١ فقط عندما تختلف قيمتي الانتماء حول Δ.

مثال (٢-٩-٣):

بفرض أن: أ، ب، جـ مجموعات جزئية أثبت الآتي:

١) أ Δ Φ = أ

٢) أ Δ أ= Φ

٣) أ Δ (ب Δ جـ) = (أ Δ ب) Δ جـ

الإثبات:

١) أ Δ Φ = (أ - Φ) ∪ (Φ - أ) = أ ∪ Φ = أ

٢) أ Δ أ= (أ - أ) ∪ (أ - أ) = Φ ∪ Φ = Φ

سوف تتضح أهمية جداول الانتماء في إثبات الخاصية رقم (٣) بطريقة غير مطوله وذلك على النحو التالي:

أ	ب	جـ	أ Δ ب	ب Δ ج	أ Δ (ب Δ ج)	(أ Δ ب) Δ ج
١	١	١	٠	٠	١	١
١	١	٠	٠	١	٠	٠
١	٠	١	١	١	٠	٠
٠	١	١	١	٠	٠	٠

أ	ب	جـ	أ ∆ ب	ب ∆ ج	أ ∆ (ب ∆ ج)	(أ ∆ ب) ∆ ج
١	٠	٠	١	٠	١	١
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

جدول (١٧)

من تطابق قيم الانتماء المتناظرة في العمودين الأخيرين بالجدول، يتضح أن:

أ ∆ (ب ∆ جـ) = (أ ∆ ب) ∆ جـ.

مثال (٢-٩-٤):

لأي مجموعتين جزئيتين أ ، ب من المجموعة الشاملة ك أثبت أن:

أ − ب = أ ∩ $\overline{ب}$.

البرهان:

أ − ب = {س ∈ ك: س ∈ أ و س ∉ ب }.

= {س ∈ ك: س ∈ أ و س ∈ $\overline{ب}$ }.

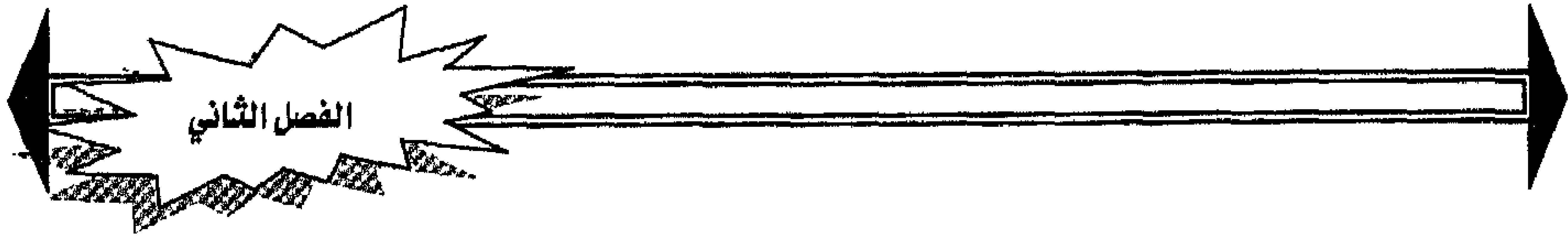
= {س ∈ ك: س ∈ (أ ∩ $\overline{ب}$)}.

= أ ∩ $\overline{ب}$.

مثال (٢-٩-٥):

بفرض أن: أ ، ب مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة ك، أثبت أن:

i) أ ∩ ($\overline{أ}$ ∪ ب) = أ ∩ ب.



ii) أ $\cup$ (أ - ب) = أ $\cup$ ب.

البرهان:

i). أ $\cap$ (أ´ $\cup$ ب) = (أ $\cap$ $\bar{أ}$) $\cup$ (أ $\cap$ ب).

=Φ $\cup$ (أ $\cap$ ب).

ii). أ $\cup$ (ب- أ) = أ $\cup$ (ب $\cap$ أ´) (أ $\cup$ ب) $\cap$ (أ $\vee$ $\bar{أ}$).

= (أ $\cup$ ب) $\cap$ ك.

= أ $\cup$ ب.

تمارين (٣):

١) أكتب عناصر المجموعات الآتية:

(i) أ = {س: س $\in$ ن، ٠ > س > ١٠}.

(ii) ب = {س: س $\in$ ن، س (عدد فردي)}.

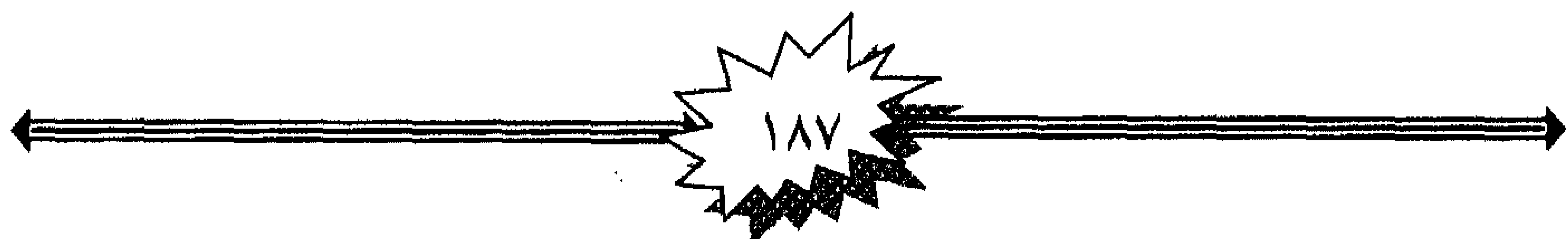
(iii) جـ ={س: س $\in$ ع، ع =٢ س^{٢} + ٢ س – ١٢ = ٠}.

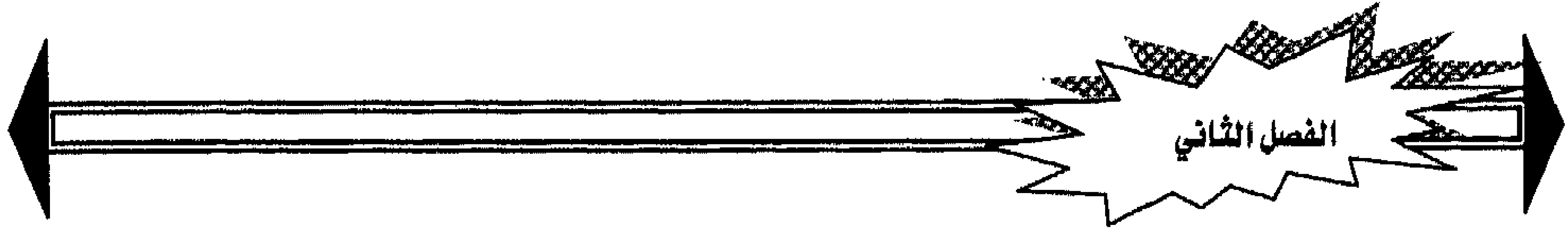
(iv): > = {س: س $\in$ ن و (س – ٢) (س – ٣) (س-٤) = صفر س عدد زوجي}.

٢) أوجد متممة كل من المجموعات السابقة في (١):

٣) إذا كانت أ = {س $\in$ ح، -٣ > س $\leq$ ١٢}.

ب ={س $\in$ ح، ٣ $\leq$س > ٢٠},





جـ = {س ∈ ن، ٥ ≤ س < ٧}.

أوجد:

i) أ ∪ ب

ii) أ − جـ

iii) أ ∩ جـ

iv) أ Δ ب

v) أ Δ جـ

v) ب - جـ

٤) عين مجموعة شاملة للمجموعتين أ، ب في (٣) ثم أوجد أ′ و ب′

٥) لأي مجموعتين جزئيتين أ، ب أثبت أن:

i) أ ∪ ب = (أ Δ ب) ∪ (أ ∩ ب).

ii) أ Δ ب = (أ ∪ ب) - (أ ∩ ب).

٦) للمجموعات الجزئية أ، ب، جـ ناقش صحة العبارة الآتية:

أ ∪ ب ⊆ جـ ∪ ب & أ ∩ ب ⊆ جـ ∩ ب ↔ أ ⊆ جـ.

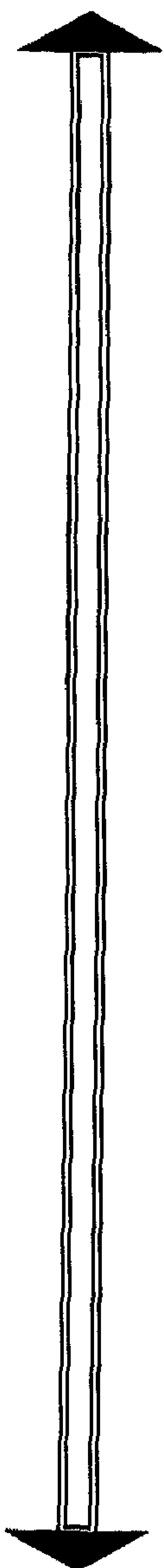
٧) للمجموعتين الجزئية أ، ب من المجموعة الشاملة ك أثبت أن:

أ ∪ (أ ∩ ب) = ك.

٨) بفرض أن مجموعات أ، ب، جـ مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة ك ناقش صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

(أي أثبت في حالة الصواب وأعط مثالاً عكسياً في حالة الخطأ).







المجموعات والأعداد

الفصل الثالث

المجموعات والأعداد

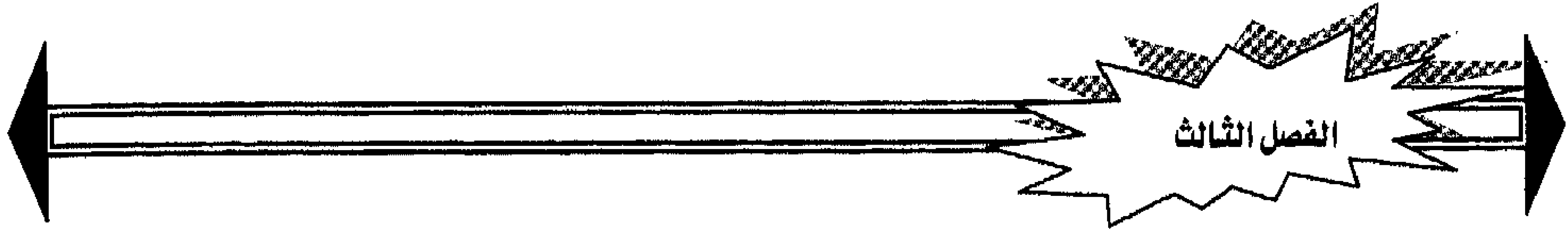
(١-١) المجموعات:

يعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الرئيسية في الرياضيات الحديثة حيث أن هناك أمثلة كثيرة لمفهوم المجموعة في حياتنا اليومية. فكثيراً ما نتكلم عن "عدد" طلاب الصف أو عن "باقة" من الزهور أو "رتل" من السيارات. إذ نكون أمام شيء مكون من عدة أشياء اصطلح على تسميته "مجموعة" وعلى هذا يمكن القول، مجموعة طلاب الصف، أو مجموعة من الزهور أو مجموعة من السيارات. ويتصف مفهوم المجموعة بالخواص التالية:

١) المجموعة كائن رياضي قائم بذاته، مفهومه يختلف عن مفهوم الأشياء التي تكونه.

٢) المجموعة معينة تعيناً تاماً بحيث يمكننا القول بأن هذا الشيء من المجموعة أو غريب عنها فمثلاً المتفوقين في كلية ما لا يمثل مجموعة، لأن وصف التفوق يختلف من شخص لأخر لقد أصطلح على تسمية كل فرد من أفراد المجموعة، "بالعنصر" سوف نرمز للمجموعات بحروف كبيرة مثل: A,B,X,Y. وللعناصر بحروف صغيرة مثل: a,b,x,y فمثلاً إذا كانت A مجموعة عناصرها a,b,c,y فيمكن أن نبين أن a عنصر في المجموعة وبالرمز $\in$ A $\ni$ a.

وتقرأ "a عنصر في "A" أو "a" تنتمي للمجموعة "A" حيث يمثل $\ni$ رمز



الانتماء أما الرمز ∌ فيعني أن هـ ليس عنصر في المجموعة A وتقرأ B ليس عنصراً في "A" أو " B" لا تنمي للمجموعة "A".

(١-٢) التعبير عن المجموعات:

توجد طريقتان يمكن بواسطتهما التعبير عن المجموعة: a , b , c , d

١) بكتابة جميع عناصرها أو بكتابة بعضها بطريقة توضح استنتاج بقيه العناصر وفي هذه الحالة توضع عناصر المجموعة بين قوسين من نوع { }: فمثلاً أن: $A = \{a , b , c , d\}$.

تمثل المجموعة عناصرها a,b,c,d أما المجموعة $B = \{a,b,c,\ldots\ldots, z\}$ فتمثل مجموعة الحروف الانجليزية.

٢) بإعطاء خاصية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر، بحيث يمكن استخدام هذه الخاصية أن نحدد بطريقة قاطعة ما إذا كان عنصر ما ينتمي إلى هذه المجموعة أولاً فمثلاً: أن المجموعة B السابقة يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

وتقرأ " مجموعة س بحيث أن س حرف صغير من الحروف الانكليزية "

ويقرأ الرمز "|" بحيث أن:

أما المجموعة جـ = {س / س^{٢} – ٣ س + ٢ = ١}.

فتقرأ مجموعة س بحيث أن: س هو جذر المعادلة س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠

أي أن: س= ١، س= ٢.

وعلى هذا يمكن كتابة مجموعة جـ بالشكل جـ = {١، ٢}.



مما تقدم لقد ذكرنا خاصيتين من خواص المجموعة، وفيما يلي يمكن إضافة الخاصيتين التاليتين:

١) عناصر المجموعة متمايزة، إذا لا داعي لتكرار أي عنصر من عناصرها، فمثلاً أن عناصر العدد ٣٢٤٥٣٢ هي ٢، ٣، ٤، ٥.

٢) ليس للتدريب الذي تورد فيه عناصر المجموعة أي أثر عليها، مجموعة الحروف التي تدخل في كلمة "وليد" هي و، ل، ي، د مرتبة بهذا الشكل أو بأي ترتيب آخر.

مثال (١): ليكن ص مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، .... }

فإن: -٦ $\not\ni$ ص، ٣ $\ni$ ص.

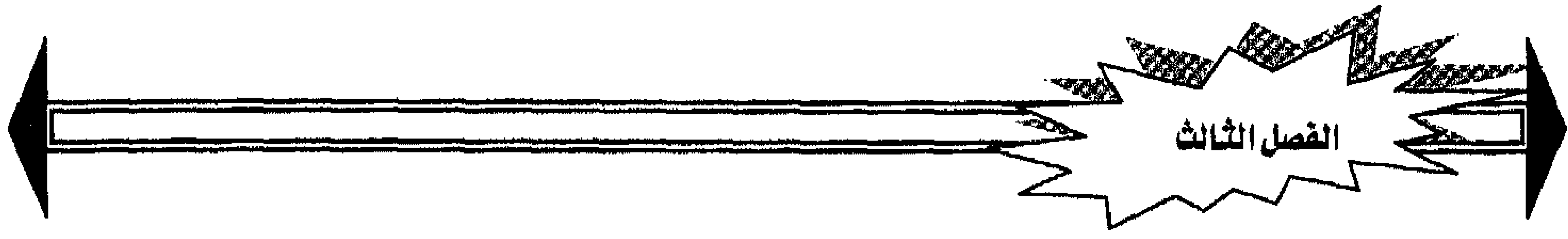
(ملاحظة: نفترض أن الطالب مُلم بالأعداد، حيث سوف تدرس خصائص الأعداد الحقيقية بصورة مختصرة في القسم الثاني من هذا الفصل).

يمكن كتابة المجموعة ص بشكل: ص = {س/ س عدد صحيح موجب}

.Empty set

(١-٣) المجموعة الخالية:

يقال للمجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر بأنها مجموعة خالية "Empty set" ويرمز لها بالرمز $\varnothing$ فمثلاً أن مجموعة الأشخاص الذين طولهم



يزيد عن خمسة أمتار هي مجموعة خالية إذ لا يوجد شخص طوله يزيد عن خمسة أمتار.

(١-٤) المجموعات الجزئية (Subsets):

إذا كان:

ﻡ ={ ٢، ٤، ٦ }

ب ={ ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

ﺟ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}.

فنرى أن كل عدد في ﻡ هو في ب وكل عدد في ب هو ﺟ.

يقال في هذه الحالة أن ﻡ مجموعة جزئية من ب و ب مجموعة جزئية من ﺟ وتكتب بالشكل ﻡ ⊂ ب، ب ⊂ ﺟ.

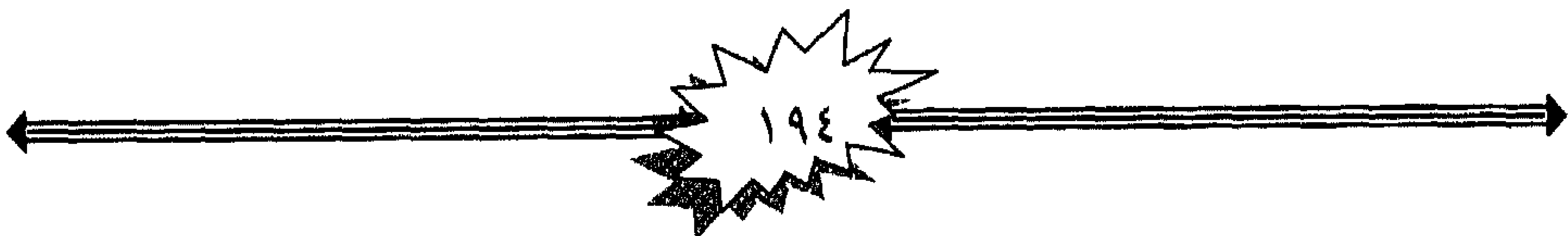
وتقرأ أن : "ﻡ" مجموعة جزئية من "ب" أو "ﻡ" محتواه في "ب".

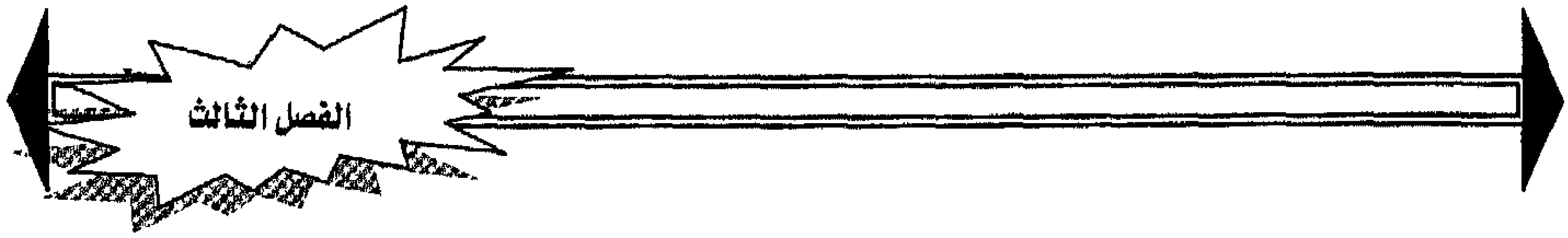
ويقرأ الرمز (ﺟ ⊃ ب).

"ب" تحتوي "ﺟ" أو "ﺟـ" محتواه في "ب".

تعريف (١-١):

نقول أن ﻡ مجموعة جزئية من ب عندما يكون كل عنصر في ﻡ هو عنصر في ب أي أن إذا كان س ∋ ﻡ فإن ص ∋ ب وتكتب ﻡ ∋ ب وإذا كانت مجموعة جزئية من ب ويوجد عنصر واحد على الأقل في ب وليس منتمياً ﻡ إلى فنقول أن ﻡ مجموعة جزئية فعلية من ب (Proper Subset).





استناداً لهذا التعريف فإنه من الواضح أن:

أ ⊂ أ، Φ ⊂ أ لكل مجموعة أ، يترك البرهان للقارئ.

(١-٥) تساوي مجموعتين:

يقال للمجموعتين أ و ب بأنهما متساويتين إذا كان أ ⊂ ب و ب ⊂ أ تكتب بالشكل أ = ب ويعني هذا أن كل عنصر من أ هو عنصر في ب وكل عنصر في ب هو عنصر في أ.

مثال (١): إذا كان: أ = { ١، ٢، ٣}

فإن: ب ={ ٢، ٣، ١ } أ = ب

مثال (٢): إذا كانت = {س / س٢ – ٣س + ٢ = ٠}

ب = {١، ٢}

جـ ={١، ٢، ٢، ١، $\frac{٦}{٣}$}

فإن: أ = ب = جـ

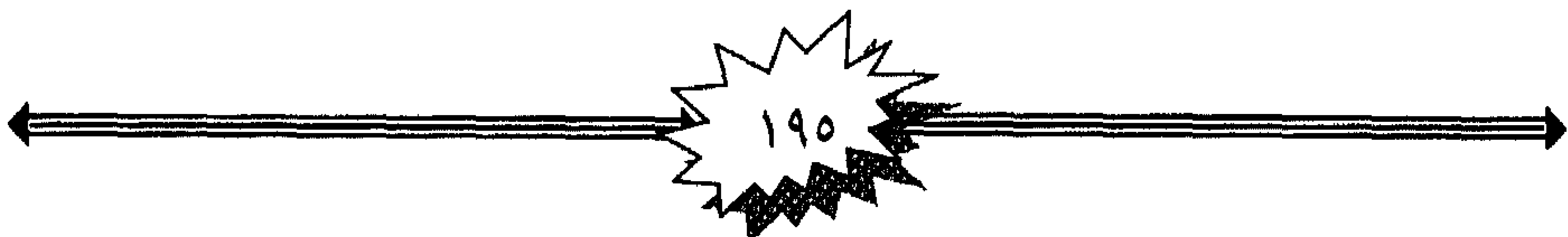
نظرية (١-٢) ⟸

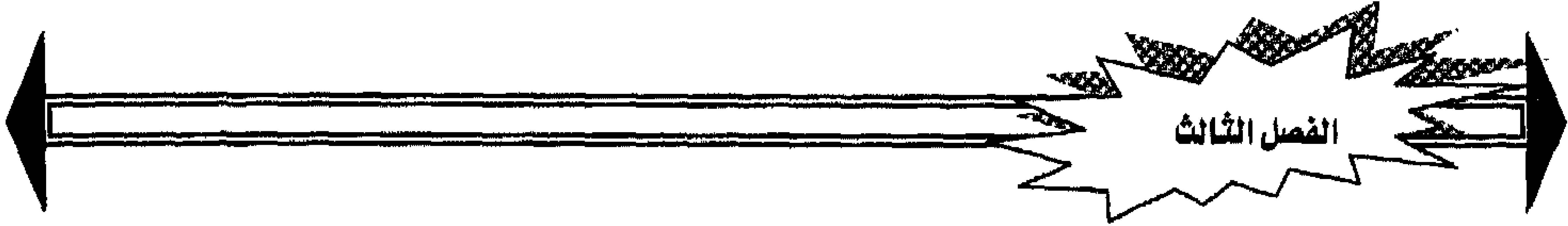
١) إذا كان أ = ب و ب = جـ فإن أ= جـ

٢) إذا كان أ ⊂ ب و ب ⊂ جـ فإن أ ⊂ جـ

البرهان (٢):

١) إذا كان أ = ∅ فإن البرهان واضح.





لتكن أ مجموعة غير خالية وليكن س عنصر فيها وبما أن أ ⊂ ب فعند ذلك يكون س عنصر في ب وبما أن ب ⊂ جـ فإن س يكون عنصر فيجـ أي أنه إذا كان س ∈ أ فإن س ∈ جـ وهذا يبين أن أ محتواه في س.

اتحاد مجموعتين (١-٦): لتكن أ و ب مجموعتين ونقصد باتحادهما أ ∪ ب مجموعة العناصر التي تنتمي إلى أ أو إلى ب.

أ ∪ ب = {س / س ∈ أ أو س ∈ ب}

فمثلاً إذا كانت ب = {أ'، ب'، س، ص}، أ = {أ'، ب'، جـ}

فإن: أ ∪ ب = {أ'، ب'، جـ، س، ص}.

(١-٧) تقاطع مجموعتين:

لتكن أ و ب مجموعتين، فنقصد بتقاطعها أ ∩ ب مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل من أ و ب.

أ ∩ ب = {س / س ∈ أ، س ∈ ب}

فمثلاً إذا كانت ب = {أ'، ب'، س، ص}، A = {أ'، ب'، جـ}

فإن: أ ∩ ب = {أ'، ب'} وإذا كان: جـ = {م، ن} فإن أ ∩ جـ = Φ

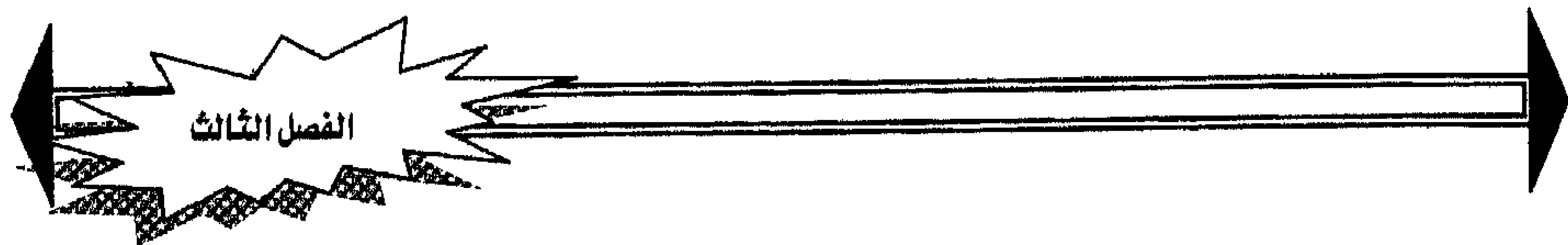
أي أن ليس للمجموعتين أ، جـ عنصر مشترك.

(١-٨) الفرق بين مجموعتين (المتممة النسبية):

لتكن أ وب مجموعتين، فنقصد بالفرق بينهما أ - ب أو أ / ب المتممة النسبية إلى ب بالنسبة إلى أ.

مجموعة العناصر التي تنتمي لمجموعة أ ولا تنتمي لمجموعة ب.





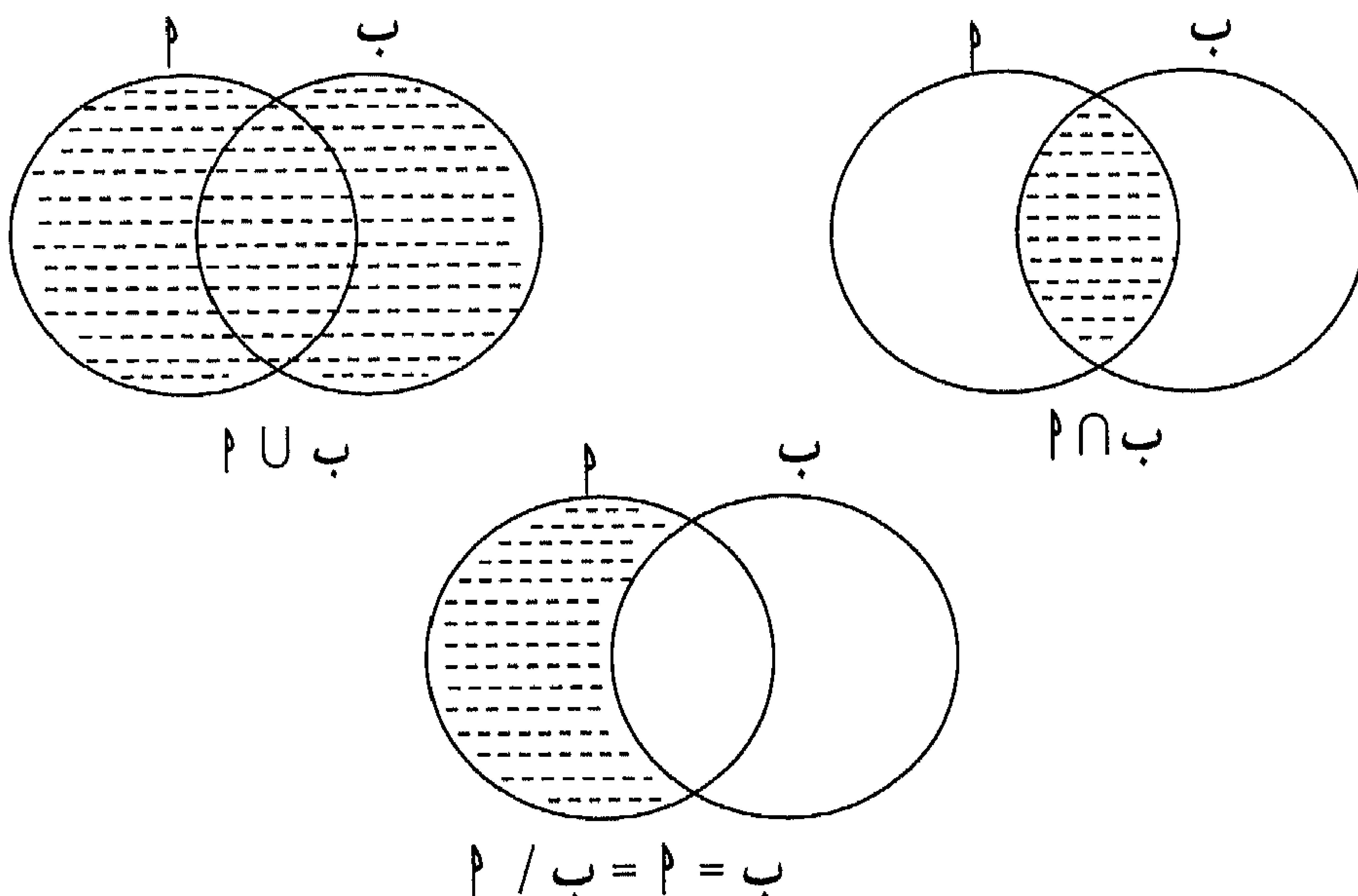
أ – ب = أ | ب = {س / س ∈ أ، س ∉ ب}

فمثلاً إذا كانت: ب = {أ'، ب'، س، ص}، أ = {أ'، ب'، ج}

فإن: ب – أ = {س، ص} أ – ب = {س}.

أشكال:

من الممكن أن تمثيل اتحاد مجموعتين وتقاطعهما والفرق بينهما بأشكال فن كما يلي:

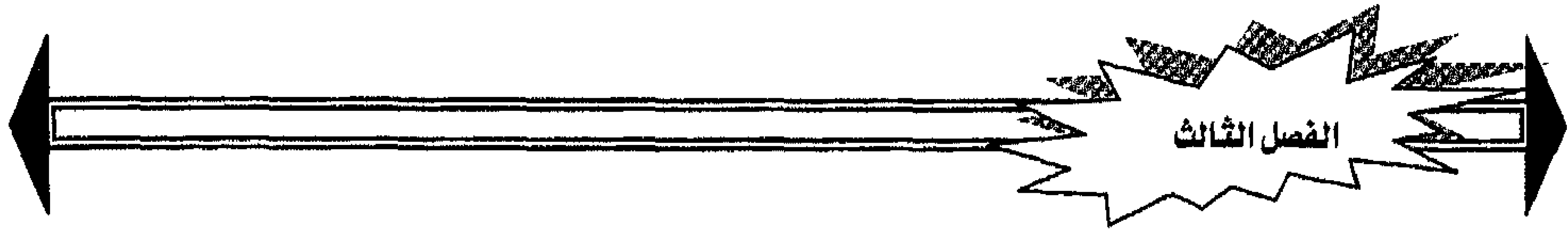


مثال (١): إذا كان:

أ = {١، ٢، ٣} ب ={٣، ٤، ٥} ج = {أ، ب}

ج (أ) : أ ∪ ب ب = أ ∩ ب ج = أ ∩ ∅

د= (أ ∩ ب) ∪ ج



الحل : (أ) أ ∪ ب ⟸ {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

(ب) أ ∩ ب ⟸ {٣}

(جـ) أ ∩ ∅ ⟸ ∅

(د) بما أن أ ∩ ب = {٣}

فإن: (أ ∩ ب) × جـ = {٣} ل {أ، ب}= {٣، أ، ب}

مثال (٢): أذكر جميع المجموعات الجزئية للمجموعة: أ = {أ'، ب'، جـ} إن المجموعات الجزئية هي:

Φ، {أ}،{ب}،{جـ}،{أ'، ب'}، {أ'، جـ}، {ب'، جـ}، {أ'، ب'، جـ}

إن من الجدير ملاحظته أن المجموعات الخالية والمجموعة نفسها هي مجموعة جزئية من المجموعة أ.

تمارين

١) إذا كان أ = {٢، ٤، ٦} ب ={١، ٣، ٥} جـ = {٦، ٧}

د ={٥، ٦} جد كل من المجموعات التالية:

(أ) أ ∪ ب

(ب) أ ∩ ب

(جـ) أ ∩ جـ

(د) أ ∪ جـ

(هـ) أ ∪ د

(و) أ ∩ د

(ز) (ب ∪ د) ∩ جـ

(ح) (ب ∪ د) ∪ جـ

(ط) (أ ∪ جـ) ∪ ب

(ي) (أ ∪ جـ) ∩ ب

(ك) (أ ∩ ب) ∩ جـ

(ل) (أ ∩ ب) ∩ د

(م) أ / جـ

(س) جـ - د



٢) إذن جميع المجموعات الجزئية للمجموعة: {أ، ب، جـ، د}

٣) إذا كان كل من: ك، ف، ق مجموعة غير خالية وغير متساوية فيما بينهما بين أي من العبارات الآتية، صحيحة دائماً، صحيحة بعض الأوقات، ليست صحيحة.

(أ) ف ∩ ق = ق (ب) ق ∪ ف = ق

(جـ) ف ∪ ق = ف (د) ق ∩ ف = ف

(هـ) ق ∪ ك = Φ (و) ق ∩ ك = Φ

(ز) ف ∪ ك = ك ∩ ف (ح) ف ∪ ق = ق ∪ ف

(ط) (ق ∪ ف) ∩ ك = ق ∪ (ف ∩ ك)

(ي) ق ∩ Φ ⊉ Φ (ك) Φ ⊂ ف

(ل) ق ⊂ Φ (م) Φ ⊂ (ق ∩ ف)

٤) بين هل أن أ = ب في المجموعات التالية؟

(أ) {جميع الأعداد بين: أ = { $\frac{١}{٢}$ و $\frac{١}{٢}$ ٢}} و ب = {١، ٢}

(ب) أ = {أ، د} ب = {أ} ∪ {د}

(جـ) أ = {١، ٢، ٥} ب = {١، ٣} ∪ {٣، ٥}

(د) أ= {١، ٢} ∩ {٢، ٣، ٤} ب = {جميع الأعداد الزوجية أقل من ٣}

٥) لتكن أ مجموعة الأعداد الصحيحة القابلة القسمة على "٢" و ب مجموعة الأعداد الصحيحة القابلة القسمة على ٤ و جـ مجموعة الأعداد الصحيحة القابلة القسمة على "٦" هل أن أ ⊂ ب ⊂ جـ صحيحة؟

٦) اذكر هل أن المجموعتين ﺃ و ب متساويتان في كل من الحالات الآتية:

(ﺃ) ﺃ = {٤ن/ ن عدد صحيح} ب = {٢ن/ ن عدد صحيح}

(ب) ﺃ = {٢ن + ١/ ن عدد صحيح} ب = {٢ن – ١/ن عدد صحيح زوجي}

(جـ) ﺃ = {٤ل – ١/ ل عدد صحيح موجب} ب = {٣ن + ١/ ن عدد أولي}

(د) ﺃ = {٢ن + ١/ ن عدد صحيح} ب = {٧ن – ٢٦/ ن عدد صحيح}

(هـ) ﺃ = {٤ن + ١/ ن عدد صحيح} ب = {٢ن + ١/ن عدد صحيح فردي}

٧) إذا كان كل من ﺃ و ب مجموعة بحيث أن ﺃ ⊂ ب برهن أن:

ﺃ = ﺃ ∩ ب و ﺃ – ب = ∅

٨) إذا كان كل من ﺃو ب مجموعة وكانت المجموعة جـ بحيث أن جـ ⊂ ﺃو ب ⊂ جـ برهن أن: جـ ⊂ ﺃ ∩ ب

و ب ⊂ د برهن أن: ﺃ ∪ ب ⊂ د

٩) إذا كان كل من ﺃ و ب مجموعة وكانت جـ مجموعة بحيث أن ﺃ ⊂ د

١٠) اذكر مما إذا كانت المجموعات التالية منتهية أو غير منتهية:

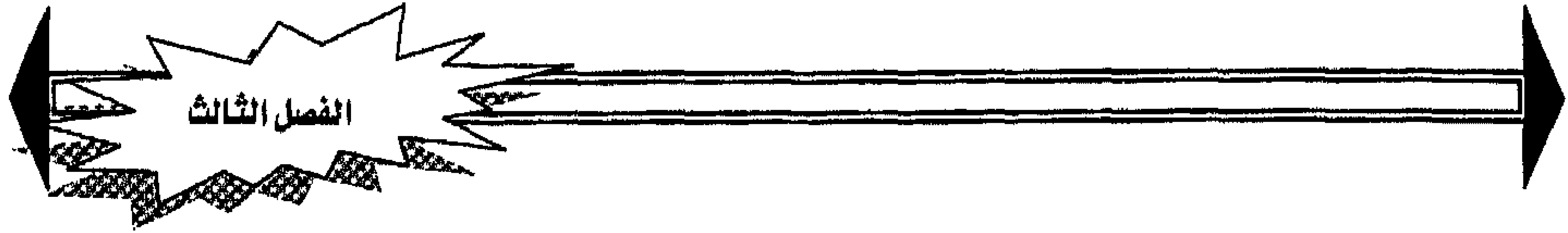
ﺃ - مجموعة المستقيمات الموازية لمحور س.

ب- مجموعة الحروف الانجليزية.

جـ- مجموعة الأعداد من مضاعفات ٥.

د- مجموعة الحيوانات التي تعيش على سطح الأرض.

هـ- مجموعة الأعداد التي هي حل المعادلة:



$س^{٢٧} + ٢٦ س^{١٨} - ١٧ س^{١١} + ٧ س^{٣} - ١٠$ = صفر.

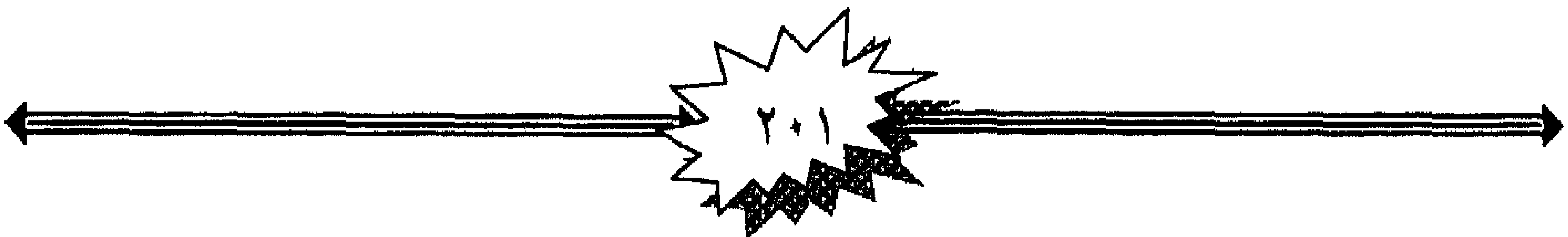
و- مجموعة الدوائر التي تمر بالنقطة (٠،٠).

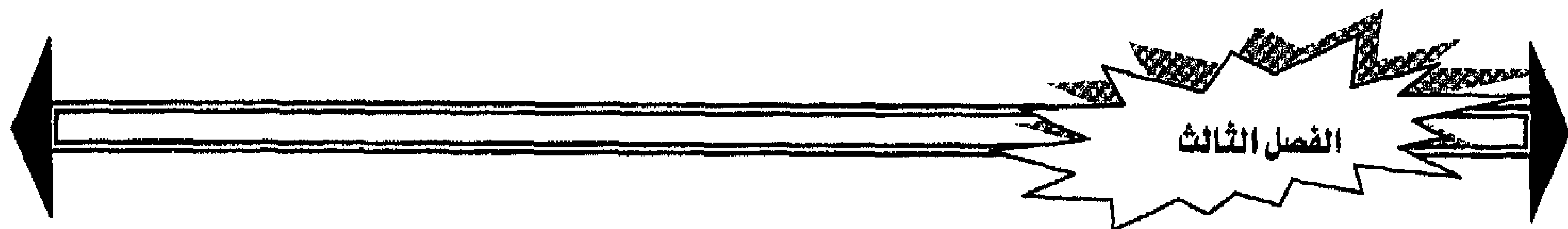
(١-٩) الأعداد الحقيقية:

إن الطريقة الحديثة لتقديم فرع من فروع الرياضيات هو إعطاء مجموعة من الفرضيات يطلق عليها بديهيات أو خواص ثم اشتقاق نظريات منها. وفي هذا الفصل سنعطي تسع بديهيات أو خواص توضح بصورة تامة نظام الأعداد الحقيقية بأن نفرض وجود مجموعة ح حيث يطلق على عناصرها الأعداد الحقيقية ونفرض وجود عمليتان تسميان الجمع والضرب (•و + وح) يمكن جمع أي عددين حقيقيين م و ب وليكن مجموعها م+ ب ويمكن ضربها حيث يكون حاصل الضرب م. ب أو م ب يقال لمجموعة الأعداد الحقيقية وعمليتا الجمع والضرب بأنها تولد حقلاً (Field) إذا حققت الشروط التالية: إذا كانت أعداد حقيقية فإن:

١- م + ب، م ب عددان حقيقيان	خاصية الإغلاق
٢- م + ب = ب + م و م ب = ب م	خاصية الإبدال
٣- م + (ب + جـ) = (م + ب) + جـ و م (ب جـ) = (م ب) جـ	خاصية التجميع
٤- م (ب + جـ) = م ب + جـ م	خاصية التوزيع

٥- يوجد عددان حقيقيان ٠، ١ بحيث أن لكل عدد حقيقي م، فإن م + ٠ = م خاصية التحايد م. ١ = م يقال أن ٠ هو العنصر المحايد لعملية الجمع ١ هو العنصر المحايد لعنصر الضرب.





٦- لكل عدد حقيقي $أ$، ما عدا الصفر، يوجد عدد حقيقي مناظر ($-أ$) بحيث أن $-أ + أ =$ صفر.

٧- لكل عدد حقيقي $أ$، ما عدا الصفر يوجد عدد حقيقي مناظر $(\frac{1}{أ})$ بحيث أن $أ\ (\frac{1}{أ}) = 1$.

تعريف (١-٣):

لكل عددين حقيقيين $أ$، $ب$ $\quad (أ - ب) = أ + (- ب)$

وعندما $ب \neq$ صفر، $\frac{أ}{ب} = أ\ (\frac{1}{ب})$

يقال للأولى عملية الطرح وللعملية الثانية بالقسمة.

أي أنه يمكن تعريفه عملية الطرح بدلالة الجمع وعملية القسمة بدلالة الضرب.

نظرية (١-٤):

$أ - ب = جـ \leftrightarrow ب + جـ = أ$

$ب \neq$ صفر وأن $\frac{أ}{ب} = جـ \leftrightarrow أ = ب\,جـ$

البرهان (١):

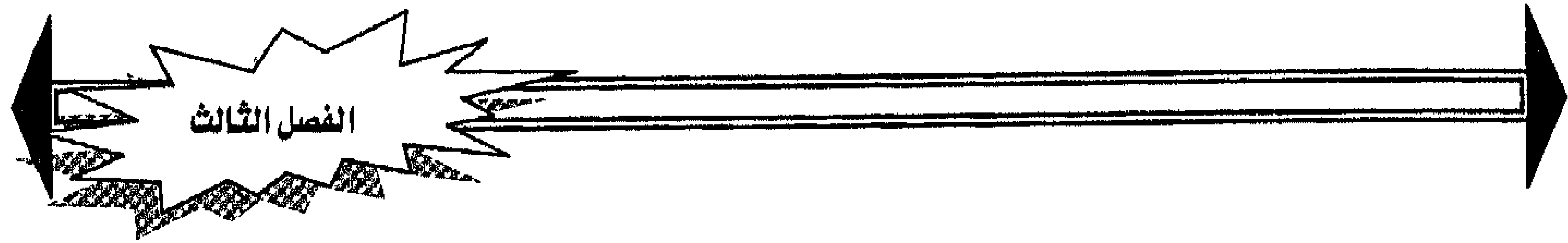
$أ - ب = أ + (- ب) = (ب + جـ) + (- ب) = (جـ + (- ب)) + ب$

$= جـ + (ب + (- ب)) = جـ + 0 = جـ \Longleftarrow$

$ب + جـ = ب + (أ - ب) = ب + (أ + (- ب))$

$= ب + ((- ب) + أ) = (ب + (- ب)) + أ = 0 + أ = أ$





البرهان (٢):

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{أ}\left(\frac{١}{\text{ب}}\right) = (\text{ب، جـ})\left(\frac{١}{\text{ب}}\right) = (\text{جـ. ب})\left(\frac{١}{\text{ب}}\right)$$

$$= \text{جـ}\left(\text{ب} . \frac{١}{\text{ب}}\right) = \text{جـ}. ١ = \text{جـ}$$

$$\text{ب جـ} = \text{ب}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) = \text{ب}\left(\text{أ} \frac{١}{\text{ب}}\right) = \text{ب}\left(\frac{١}{\text{ب}}\text{، أ}\right)$$

$$= \left(\text{ب} . \frac{١}{\text{ب}}\right) . \text{أ} = ١ . \text{أ} = \text{أ}$$

لقد عرفنا ٠، ١ من الخاصية الخاصة، نعرف العدد ٢ بأنه ١ + ١ والعدد ٣ بأنه ١ + ٢. وهكذا يمكن أن نعرف ١٠ و ١٧ أو ١٠٠ ونحصل على المجموعة:

ن = {١، ٢، ٣، ......}

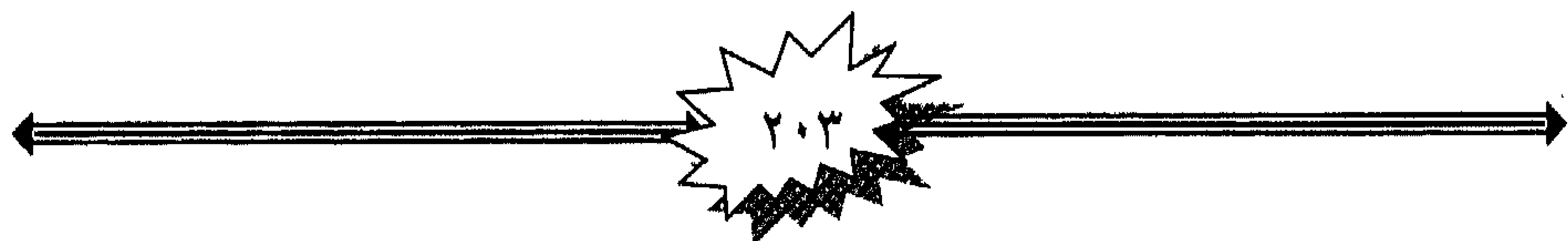
التي تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية

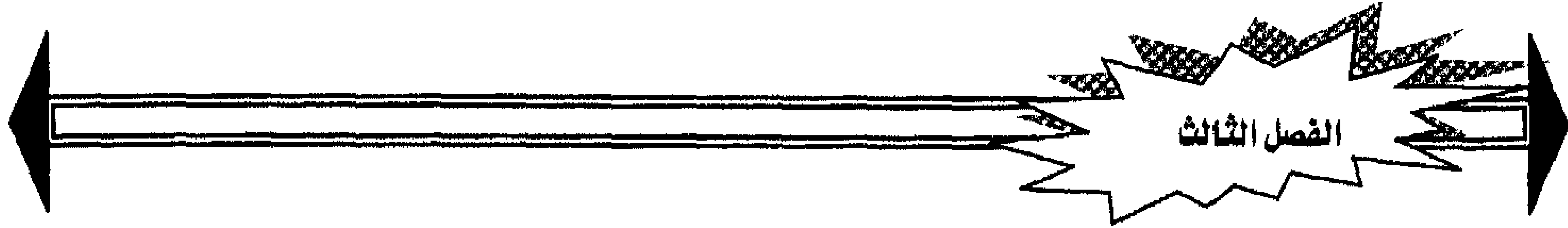
وباستخدام الخاصية السادسة، فإنه توجد المجموعة المناظرة:

-ن ={-١، -٢، -٣، .... } والتي عناصرها في سالب الأعداد الطبيعية β = ن ل{٠} ل - ن

والتي عناصرها الأعداد الطبيعية والصفر وسالب الأعداد الطبيعية لمجموعة الأعداد الصحيحة ويرمز لها بالرمز β وهي: β ={ ...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ..... }

نفرض أن ح'، ي عددان صحيحان. وبما أن β هي المجموعة الجزئية من





ح فإن ح′، ي ∈ ح فإذا كان ي ≠ صفر فإن: $\frac{ح}{ي}$ = ح′ $\left(\frac{1}{ي}\right)$ عدد حقيقي

تسمى المجموعة ن بحيث أن: ن = {ح′ / ي / ي , ح′ ∈ β، ي ≠ صفر}

مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers:

فمثلاً إن كل من $\frac{7}{5}$، $\frac{2}{3}$، $\frac{4}{1}$، $\frac{0}{1}$ = 0 ← عدد نسبي

ولما كان من الممكن التعبير عن كل عدد صحيح

ح′، $\frac{ح}{1}$ فإن ن ⊂ β ⊂ ن ⊂ ح

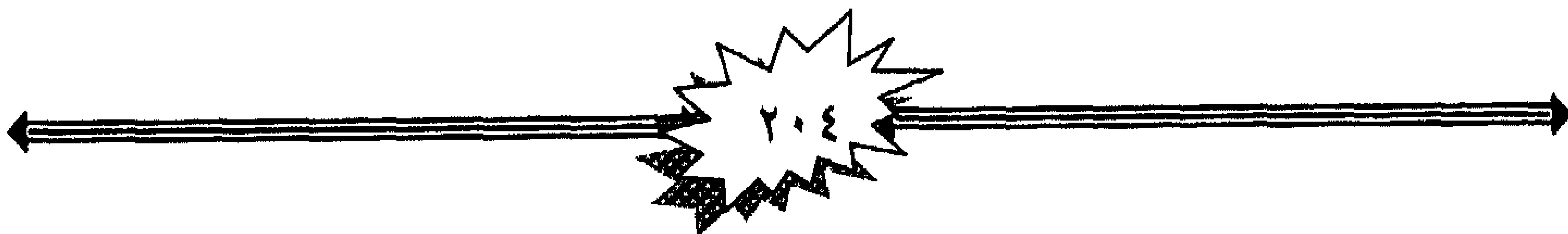
لقد ألف الطالب تقسيم ح إلى ثلاث مجموعات جزئية غير متقاطقة وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح+ ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ح- ومجموعة {0} التي تحوي الصفر فقط حيث أن: ح′ ∪ {صفر} ∪ −ح′ = خ صحيحة

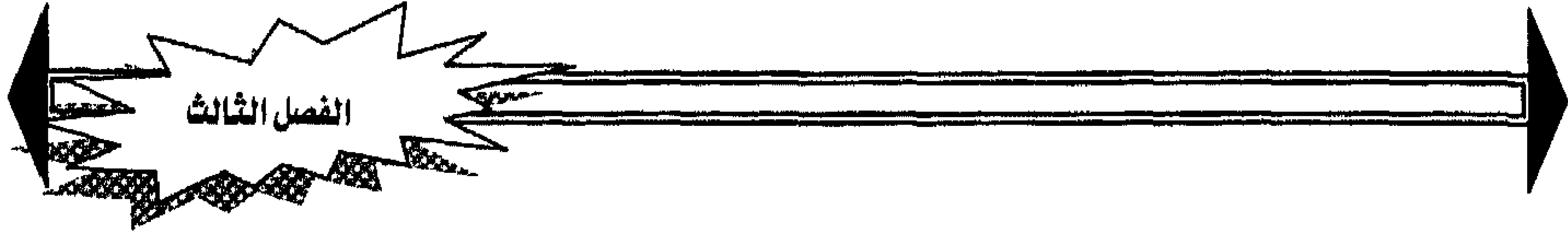
8) توجد مجموعة جزئية غير خالية ح′ من مجموعة الأعداد الحقيقية ولها الخواص التالية:

أ) صفر ∈ ح′

ب) إذا كان أ ≠ صفر فأما أ ∈ ح′ أو - أ ∈ ح وليس كليهما

جـ) إذا كان أ ∈ ح′ أو ب ∈ ح′ فإن أ + ب ∈ ح′ و أ ب ∈ ح′





إذا فرضنا أن الشروط الثمان صحيحة فتقول أن نظام الأعداد الحقيقية وعمليتا الجمع والضرب تولد حقل مرتب Ordered Field.

فعندما أ ∈ ح′، فنقول أن أ عدد موجب.

وعندما - ب ∈ ح′، فنقول أن ب عدد سالب.

وعندما أ - ب ∈ ح′، فنقول أن ب أقل من أ و أ > ب أو أن أ أكبر من ب، ب < أ.

وعلى هذا يمكن القول بأن كل عدد حقيقي سالب هو أقل من صفر والصفر هو أقل من كل عدد حقيقي موجب.

(١-١٠) المجموعات المحدودة (Bounded sets)

تعريف (١-٥):

لتكن ز مجموعة جزئية غير خالية من ح يقال أن ز:

١- محدودة من الأعلى، إذا وجد عدد حقيقي م بحيث أن:

ويقال أن م ≥ أ هو حد أعلى للمجموعة ز.

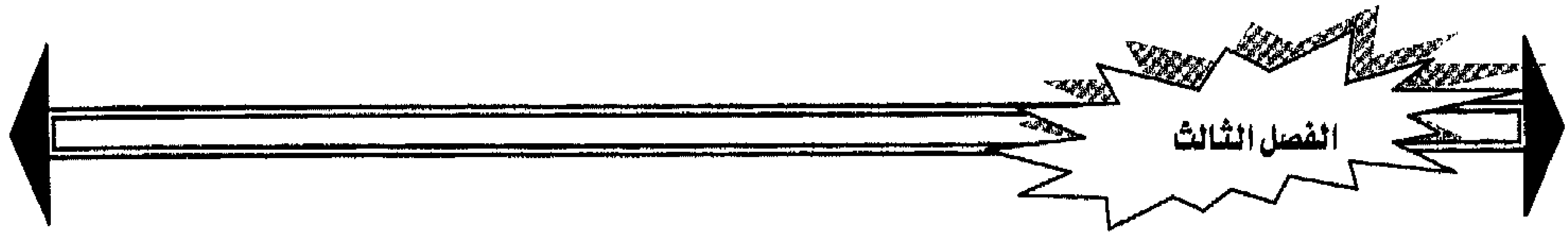
٢- محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي م′ بحيث أن:

ويقال أن أ ≥ م′ هو حد أدنى للمجموعة ز.

٣- محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى والأسفل

فمثلاً في المجموعة ز = {-٢، ٣، ١٠} إن ١٠ هو حد أعلى للمجموعة ز و -٢ وهو حد أدنى للمجموعة ز.





تعريف (٢):

لتكن ز مجموعة جزئية من ح وكان م′ هو حد أعلى للمجموعة ز ولا يوجد عدد حقيقي أقل من م′ وهو حد أعلى للمجموعة ز فيقول أن م′ هو أصغر حد أعلى للمجموعة ز.

وإذا كان ن حد أدنى للمجموعة ز ولا يوجد عدد حقيقي أكبر من ن هو حد أدنى للمجموعة ز فقال أن ن هو أكبر حد أدنى للمجموعة ز.

Least upper bouud (L.U.B)

من الواضح عندما يوجد حد أكبر للمجموعة فإنه وحيد

وبالمثل إذا وجد حد أصغر للمجموعة فإنه وحيد

مثال (١):

في المجموعة: ب = {٠,١، ٠,٠١، ٠,٠٠١ . ٠,٠٠٠١، .....}

إن أقل حد أعلى للمجموعة ب هو ٠,١

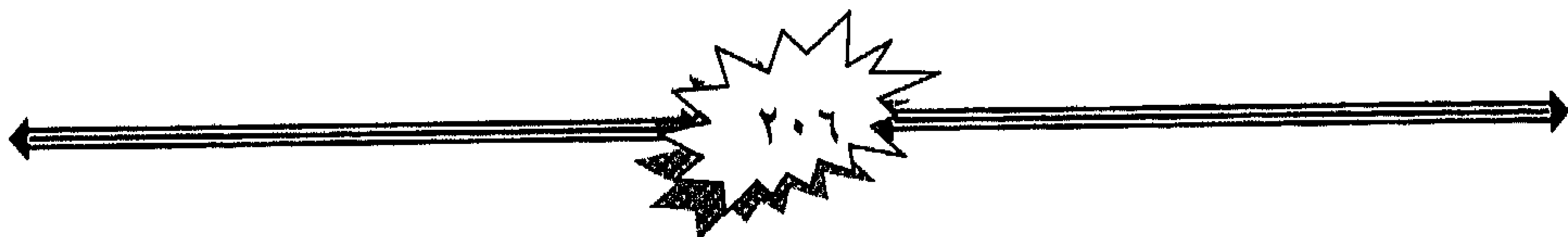
بينما أكبر حد أدنى للمجموعة ب هو الصفر.

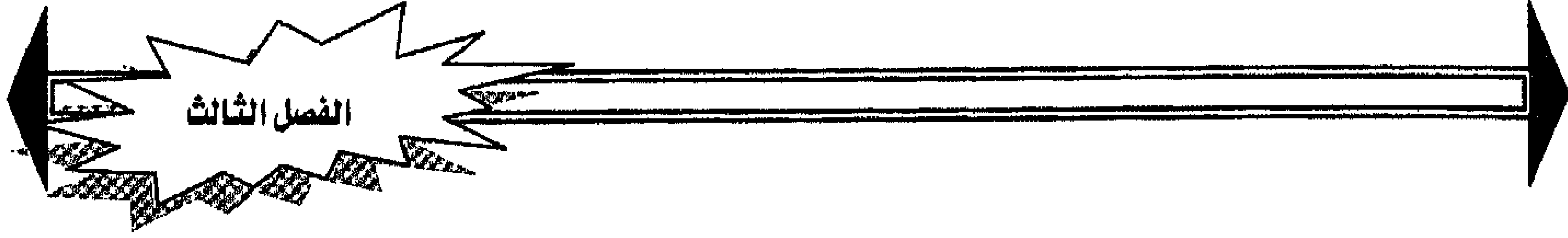
في المجموعة A = { $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٤}{٥}$، ..... }.

إن أقل حد أعلى لمجموعة ﻡ هو ١ .

وأكبر حد أدنى هو $\frac{٢}{٣}$.

ولذلك نلاحظ أن الحد الأدنى للمجموعة قد ينتمي للمجموعة أو لا ينتمي والشيء نفسه بالنسبة إلى الحد الأكبر للمجموعة (G. L. B) qrealest .lower bourt





٩- خاصية الكمال

كل مجموعة جزئية غير خالية من الأعداد الحقيقية والمحدودة من الأعلى لها أصغر حد أعلى. وكل مجموعة جزئية غير خالية من الأعداد الحقيقية والمحدودة من الأسفل يكون لها أكبر حد أدنى.

يسمى الحقل المرتب والذي عناصره تحقق الخاصية التاسعة بالحقل المرتب الكامل إن نظام الأعداد الحقيقية هو حقل مرتب كامل.

سوف نطلق على عناصر المجموعة ح+ بالأعداد الموجبة الحقيقية أما الأعداد الحقيقية والتي لا تساوي صفر وغير موجبة بالأعداد السالبة الحقيقية فإذا كان ح+ عدد حقيقي موجب فإن ح- عدد حقيقي سالب وإذا كان ي عدد حقيقي سالب فإن ¯ي عدد حقيقي + إنه من الملائم تمثيل الأعداد الحقيقية بنقاط على خط مستقيم حيث يمكن تعريف "النقاط" على " خط مستقيم " كأعداد حقيقية فعندما نقول أن القطة ح+ على يسار ي تعني أن العدد الحقيقي ح+ هو أقل من العدد الحقيقي ي+.

نظرية (١-٦):

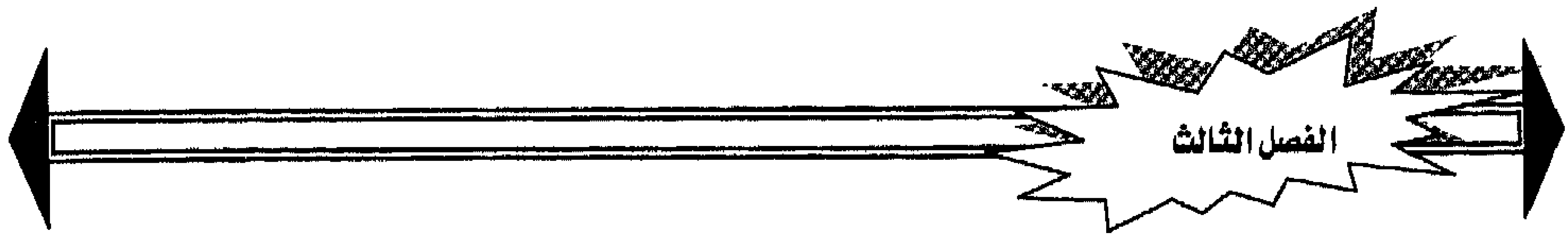
للمعادلة ٢ + س = ب حل واحد فقط

البرهان:

٢ + (-٢ + ب) = [٢ + (-٢×ب)] + ب = صفر + ب = ب

أي الحل هو -٢ + ب





فإذا كان $أ + جـ = أ + د$ فإن: $(-أ + (أ + جـ)) = -أ + (أ + د)$

وعليه فإن $جـ = د$ وبذلك يكون $-أ + د$ حلاً وحيداً.

نظرية (١-٧):

صفر $أ$ = صفر

البرهان: $أ.أ = (٠ + أ)\ أ$ = صفر × $أ + أ.أ$

أي أن ← صفر . $أ = أ$

نظرية (١-٨):

للمعادلة: $أ\ س = ب$، $أ \neq$ صفر حل واحد فقط

البرهان ← $أ\ (\frac{١}{أ} ب) = (أ \cdot \frac{١}{أ})\ ب = ١ \cdot ب = ب$

أي أن الحل هو $(\frac{١}{أ})$ ب حيث يمكن كتابته بالشكل $\frac{ب}{أ}$:

للبرهنة على أن الحل وحيد نفرض أن $س_١$، $س_٢$ هما حلان للمعادلة:

$أ\ س_١ = ب$

و $أ\ س_٢ = ب$

$أ\ س_١ = أ\ س_٢$

$(\frac{١}{أ})(أ \cdot س_١) = (\frac{١}{أ})(أ\ س_٢)$

$(\frac{١}{أ} \cdot أ)\ س_١ = (\frac{١}{أ} \cdot أ)\ س_٢$



$١ . س_١ = ١ . س_٢$

$س_١ = س_٢$

نظرية (١-٩):

إذ كان ب = صفر فإن ٱ ≠ صفر و ٱ ب = صفر

البرهان:

$(\frac{١}{ٱ}) (ٱب) = [\frac{١}{ٱ} ٱ] ب = ١ . ب = ب$

وكذلك فإن:

$\frac{١}{ٱ} [ٱب] = \frac{١}{ٱ} . صفر = صفر$

نظرية (١-١٠):

$(-ٱ)ب = {}^{-}ٱب$

البرهان:

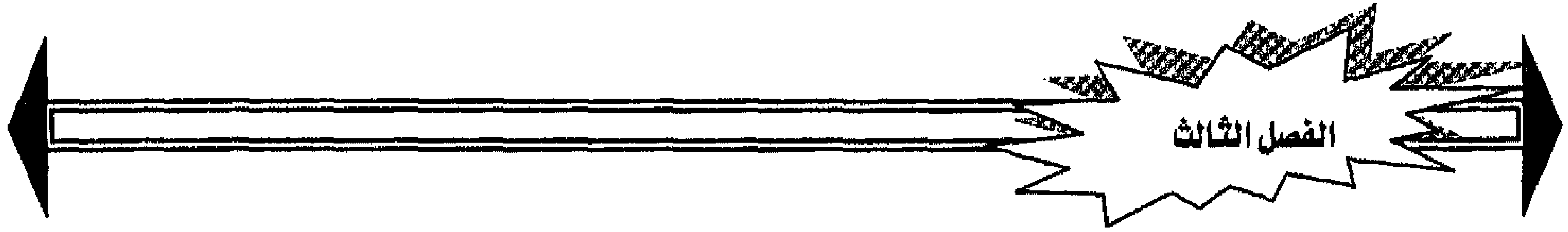
ٱب + [(-ٱ)ب] = [ٱ + (-ٱ)] ب= (٠ * ب) = صفر

ومن النظرية ٢ نحصل على أن:

(-ٱ) ب= -ٱ ب

نظرية (١-١١):

(-ٱ) (- ب) = ٱب



البرهان:

(-أ) (-ب) = - [أ(-ب)] = - (-أب)

ومن نظرية ٢ نحصل على أن: - (-أب) = أب

نظرية (١-١٢):

١) إذا كان أ ≠ ب فإما أ < ب أو ب > أ

٢) إذا كان أ > ب فإن أ ≠ ب

٣) إذا كان أ > ب و ب > جـ فإن: أ > جـ

البرهان:

١- أ – ب ≠ صفر وعلى هذا فإن أ – ب ∋ ح′ ب - أ ∋ ح$^{+}$

٢- ح$^{+}$∋ أ – ب وعلى هذا فإن ب – أ ≠ صفر

٣- ب – أ ∋ ح$^{+}$ و جـ – ب ∋ ح$^{+}$ أي أن (ب - أ) + (جـ - ب) = جـ – أ ∋ ح$^{+}$

تسمى < في ب < أ بالعلاقة المرتبة.

نظرية (١-١٣):

١- إذا كان أ > ب فإن أ + جـ > ب+ جـ

٢- إذا كان أ > ب و جـ < ٠ فإن أ جـ > ب جـ

٣- إذا كان أ > ب و صفر < جـ فإن أ جـ < ب جـ



البرهان:

١- (ب + جـ) – (ا + جـ) = ب - ا $\in$ ح$^+$

٢- (ب - ا) $\in$ ح، جـ $\in$ ح* فإن

جـ (ب - ا) = جـ ب - جـ ا $\in$ ا

٣- - جـ $\in$ ح$^+$ و - ب – جـ $\in$ ح$^+$

(- جـ) (ب - ا) = جـ(ا - ب) = ا جـ - جـ ب $\in$ ح$^+$

تمارين

١- إذا كان ا $\neq$ صفر، ب $\neq$ صفر فإن اب $\neq$ صفر

٢- إذا كان ا > ب فإن ا > $\frac{ا+ب}{٢}$ ، $\frac{ا+ب}{٢}$ > ب

أي أنه يوجد عدد جـ بحيث أن ا > جـ > ب

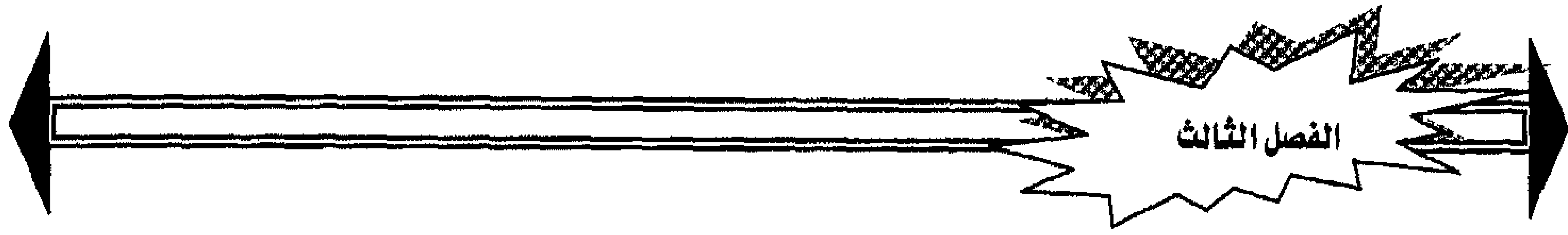
٣- إذا كان ب $\neq$ صفر و $\frac{ا}{ب}$ = صفر فإن ا = صفر

٤- إن مجموع عددين حقيقيين سالبين هو عدد سالب.

٥- إذا كان ب $\neq$ صفر فإن – ($\frac{ا}{ب}$) = $\frac{-ا}{ب}$ = $\frac{ا}{-ب}$

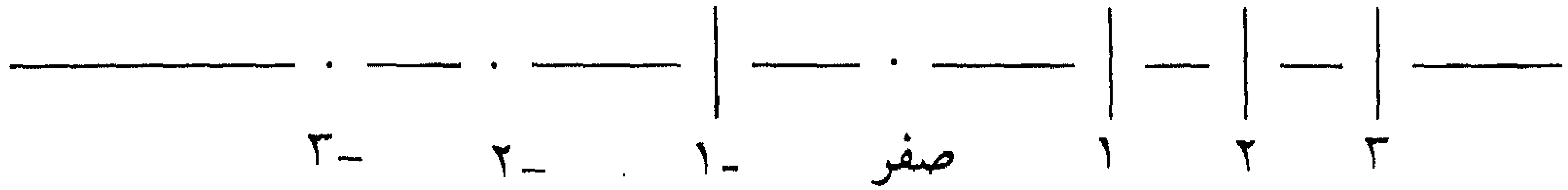
٦- إذا كان ا $\neq$ ٠ و اب = جـ ا فإن ب = جـ

٧- ا (ب - جـ) = اب - ا جـ



(١-١١) الفترات: Intervals

لقد ذكرنا بأنه يوجد هناك تمثيل للأعداد الحقيقية وذلك باعتبار أن كل عدد حقيقي نقطة تقع على مستقيم ويدعى هذا المستقيم "خط العدد الحقيقي" حيث عند رسم "خط العدد الحقيقي" يمكن تمثيل كل نقطة فيه بعدد حقيقي كما في الشكل (١-٢)



شكل (١-٢)

تعريف (١-١٤):

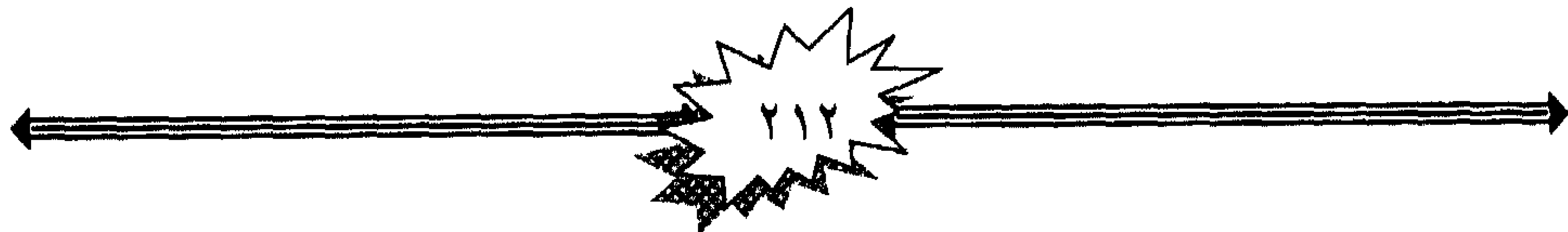
ليكن كل من أ، ب عددان حقيقيان بحيث أن: أ > ب

١) يقال للمجموعة{س/ س ∋ ح، أ > س > ب} بأنها فترة مفتوحة وتكتب بالشكل (أ، ب)

٢) يقال للمجموعة {س/ س ∋ ح، أ ≥ س ≥ ب} بأنها فترة مغلقة وتكتب بالشكل: [أ، ب]

٣) يقال للمجموعة{س/ س ∋ ح، أ ≥ س > ب} بأنها فترة نصف مغلقة فتكتب بالشكل: [أ، ب)

٤) يقال للمجموعة{س/ س ∋ ح، أ > س ≥ ب} بأنها فترة نصف مغلقة فتكتب بالشكل: (أ، ب]



أي أن الفترة المفتوحة هي نقاط خط مستقيم حقيقي من أ إلى ب عدا النقطتين أ، ب بينما الفترة المغلقة هي مجموعة نقاط خط المستقيم الحقيقي من أ إلى ب مع النقطتين أ، ب يقال للنقطتين أ، ب طرفي الفترة.

تعريف (١-١٥):

إن المجموعات التالية تمثل فترات أخرى وهي:

(أ، ∞) ={س/ س ∈ ح، س > أ}

[أ، ∞) ={س/ س ∈ ح، س ≥ أ}

(-∞، أ] ={س/ س ∈ ح س ≤ أ}

(-∞، أ) ={س/ س ∈ ح س < أ}

(١-١٢) القيمة المطلقة Absolute Value:

تعريف (٥):

تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أ ويكتب بالشكل |أ| بما يلي:

١- إذا كان أ = صفر فإن |أ| = صفر

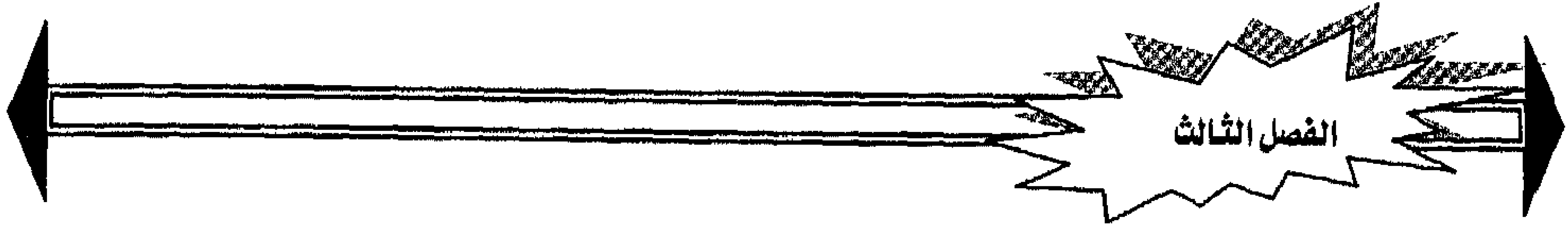
٢- إذا كان أ < صفر فإن |أ| = -أ

٣- إذا كان أ > صفر فإن |أ| = أ

فمثلاً إن ٥ =|٥| و ٦ = |-٦|

نظرية (١-١٦):

لكل عدد حقيقي: ١ر ١ = ١ـر ١ = ر



البرهان

إذا كان ر = صفر فإن – ر = صفر وإن |– ر| = صفر = |ر|

إذا كان ر < صفر فإن – ر > صفر وإن

إذا كان ر > صفر فإن – ر < صفر وإن

نحصل من جميع الحالات أن: |- ر| = |ر|

نظرية (١-١٧):

ليكن ﻫ، ب أي عددين حقيقين فإن |ﻫب| = |ﻫ| |ب|

البرهان:

إذا كان ﻫ = صفر فإن |ﻫ| = صفر و ﻫب = صفر

أي أن |ﻫب| = |٠| = ٠ = - |ب| = |ﻫ| |ب|

حيث نحصل أن | ب| = صفر = |ﻫ| |ب|

وبالمثل إذا كان ب = صفر فإن |ﻫ ب| = صفر =|ﻫ| |ب|

إذا كانﻫ ≠ صفر، ب ≠ صفر فتكون لدينا حالات وهي:

(١) صفر < ﻫ، صفر < ب

(٢) صفر > ﻫ، صفر > ب

(٣) صفر < ﻫ، صفر > ب

(٤) صفر > ﻫ، صفر < ب



للحالة:

(١) لدينا صفر < أب وأن |أب| = أب = |أ| |ب|

(٢) لدينا صفر > أب وأن |أب| = - أب = أ (-ب) = |أ| |ب|

(٣) لدينا صفر > أب وأن |أب| = - أب = |أ| |ب|

(٤) لدينا صفر < أب وأن |أب| = أب = (-أ) (-ب) = |أ| |ب|

ومنها يكون لدينا |أب| = |أ| |ب| لجمع الحالات:

نظرية (١-١٨):

ليكن أ، ب أي عددين حقيقيين فإن: |أ- ب| = |ب - أ|

البرهان:

-ر = ب- أ فإن ر = أ، ب

نفرض أن ر = أ- ب فإن ¯ر= ب - أ

ومن نظرية ٨ نحصل على أن |أ- ب| = |ر| =| ¯ر| = |أ- ب|

أي أن: |أ- ب| = | ب - أ |

نظرية (١-١٩):

ليكن أ أي عدد حقيقي فإن: |أ| ≥ أ

البرهان:

إذا كان |ر| = صفر = ر فإن ر = صفر

إذا كان صفر < ر فإن |ر| = ر

إذا كان صفر < ر فإن –ر < صفر وإن |ر| = -ر < صفر < ر

أي أن ر < |ر|

ومنها نحصل أن |ر| ≥ ر لجميع الحالات

نظرية (١-٢٠):

إذا كان أ < صفر وكان |س| > أ فإن – أ > س > أ وبالعكس

البرهان:

(١) إذا كان |س| < أ

بما أن أ > صفر فإن – أ < صفر وإذا كان س ≤ صفر فإن س = |س|

وأن أ > |س| = – أ ≤ صفر > س فإن أ > |س|، س > صفر

أي أن أ > س >– أ

وإذا كان أ > صفر فإن – س = |س|

وإن أ > - س > - أ

أي أن أ > س >– أ

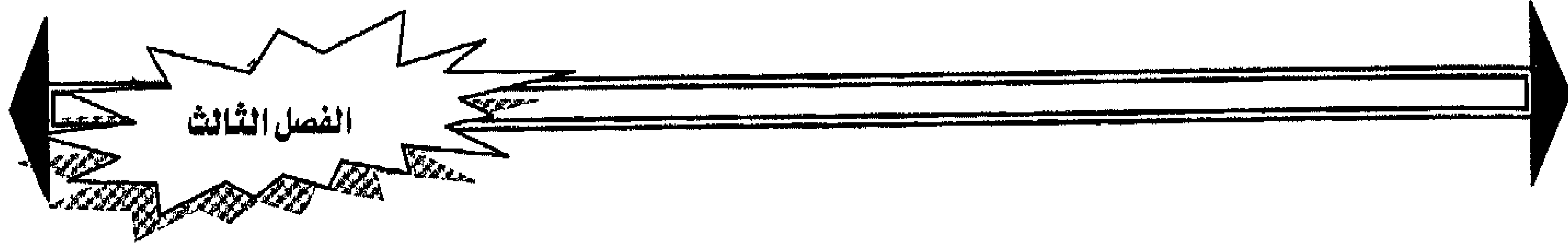
وعلى هذا إذا كان أ > |س| فإن أ > س >– أ

٢) إذا كان أ > س > - أ

وإذا كان س ≤ صفر فإن > س = |س|

وإذا كان صفر > س فإن – س = |س| ولما كان س > - أ فإن

أ > - س وأن أ > |س|



وعلى هذا إذا كان - ٲ > س > ٲ فإن ٲ > |س|

|س| = { س   س > صفر
٥   س= صفر
- س   س< صفر

نتيجة (١-٢٠)

إذا كان ٲ < صفر وكان ب، س عددين صحيحين وكان |س – ب| < ٲ

فإن - ٲ > س – ب > ٲ

أي أن ب - ٲ > س > ب + ٲ

نظرية (١-٢١):

ليكن كل من ٲ، ب عددان حقيقيان فإن |ٲ + ب| ≥ |ٲ| + |ب|

البرهان:

لما كان س = ± |س| وأن

- |ٲ| ≥ ٲ ≥ |ٲ|

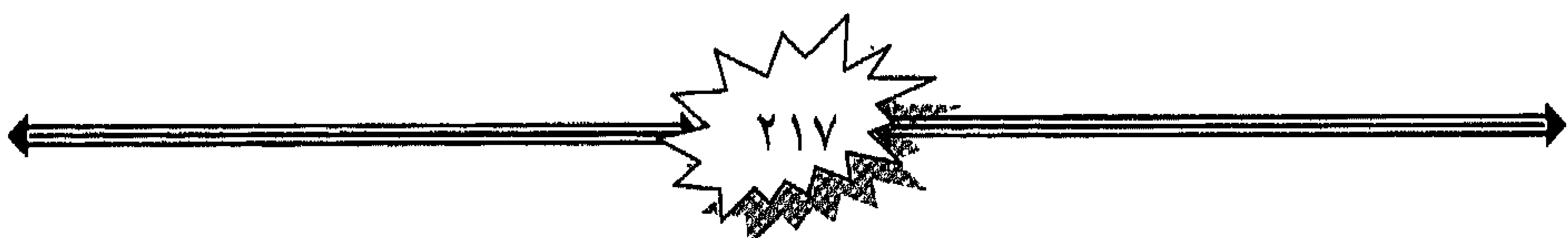
- |ب| ≥ ب ≥ |ب|

وبالجمع نحصل أن

(- |ٲ|+|ب|) ≥ ٲ + ب ≥ (|ٲ| +|ب|)

ومن نظرية (١-٢١) نحصل

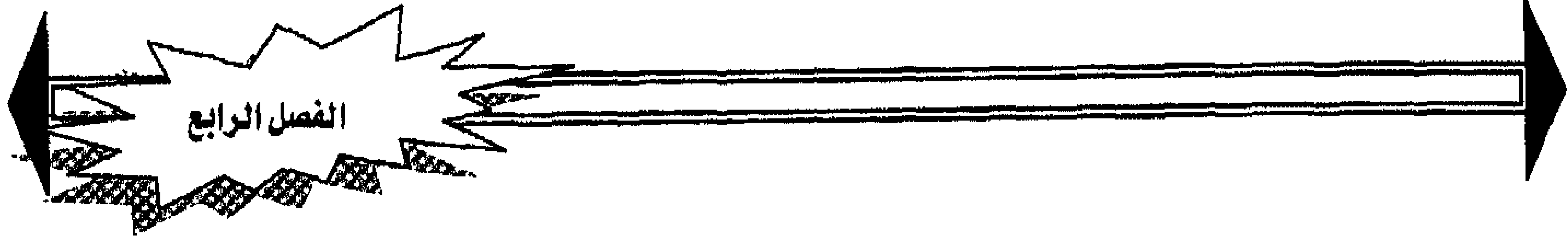
|ٲ + ب| ≥ |ٲ| +|ب|



الفصل الرابع

التوزيعات التكرارية والتمثيل البياني

The Frequency Distributions and Gravph



الفصل الرابع

التوزيعات التكرارية والتمثيل البياني

The Frequency Distributions and Gravph

تعريف علم الاحصاء Statistics

هو العلم الذي يهتم بجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات بهدف الوصول إلى المعلومات تفيد في أخذ قرارات سليمة على ضوء ذلك التحليل.

أهمية استخدامات علم الاحصاء.

هناك العديد من المجالات التي يُستخدم فيها الاحصاء نذكر منها على سبيل المثال:

١- تساعد في عرض كميات كبيرة من البيانات بصورة وسهلة ومبسطة.

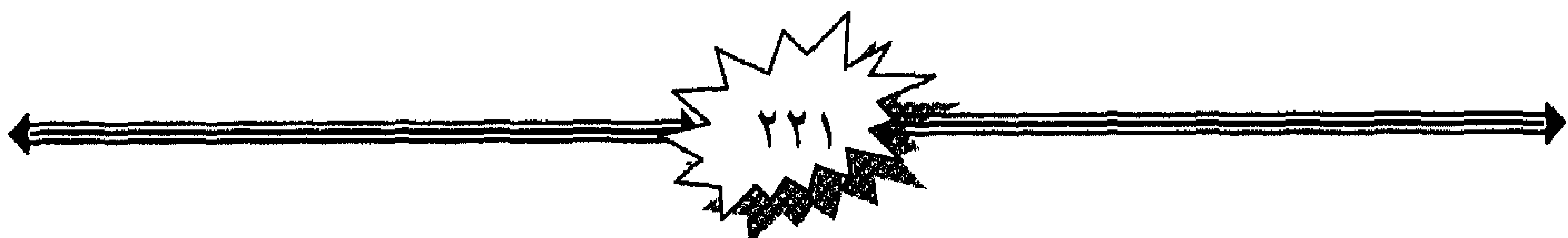
٢- تعطي طرق المقارنة بين هذه البيانات وفحصها بغرض اعطاء قرارات سليمة.

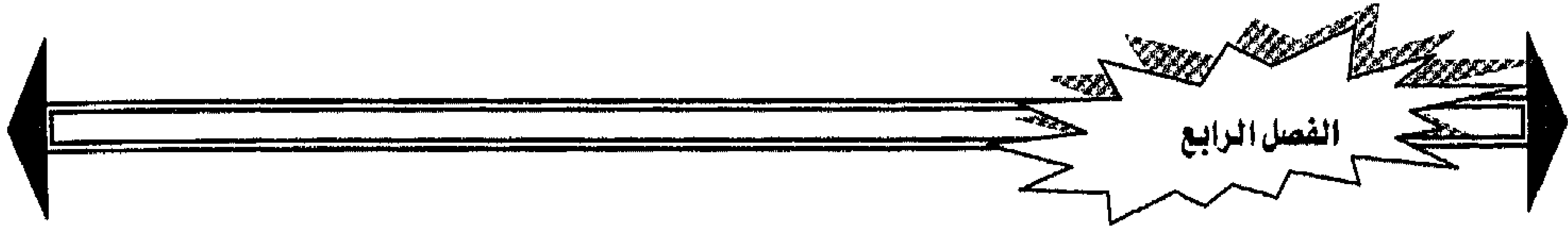
٣- تساعد في الوصول إلى رؤية سليمة وذلك من خلال العرض البياني.

٤- تساعد في إيجاد شروط العلاقات بين المتغيرات.

٥- تقوم بإعطاء المعلومات اللازمة لرجال الأعمال والمديرين والتي تساعدهم لرسم السياسات والبرامج المستقبلية.

٦- تفيد في العديد من المجالات مثل البنوك، الجامعات، مكاتب التنسيق، محطات السكك الحديدية وغيرها.





* البيانات وطرق جمعها :

وتعرف البيانات الخام بأنها جميع القياسات والمشاهدات التي يمكن جمعها لتجربة أو لظاهرة ما إما عن طريق التعداد أو عن طريق المسح أو بطرق القياس العادية أو من مصادر أخرى كسجلات المواليد والوفيات. وكلمة بيانات خام تعني أنها بيانات إحصائية في صورتها وقبل تطبيق أي عمليات أو أي طرق احصائية عليها وتنقسم البيانات الاحصائية إلى نوعان هما:

١) بيانات أولية Primary data:

وهي بيانات يقوم الشخص نفسه أو مؤسسة ما بجمع تلك البيانات من مصدرها الأولي لكي يستخدمها شخص آخر أو مؤسسة أخرى.

٢) بيانات ثانوية Secondery data

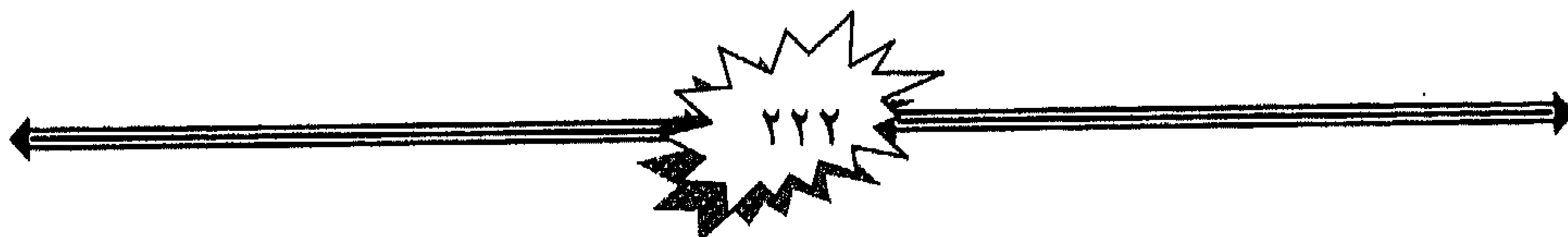
وهي بيانات يقوم شخص ما أو المؤسسة ما بجمع تلك البيانات من مصدرها الأولى لكي يستخدمها شخص آخر أو مؤسسة أخرى.

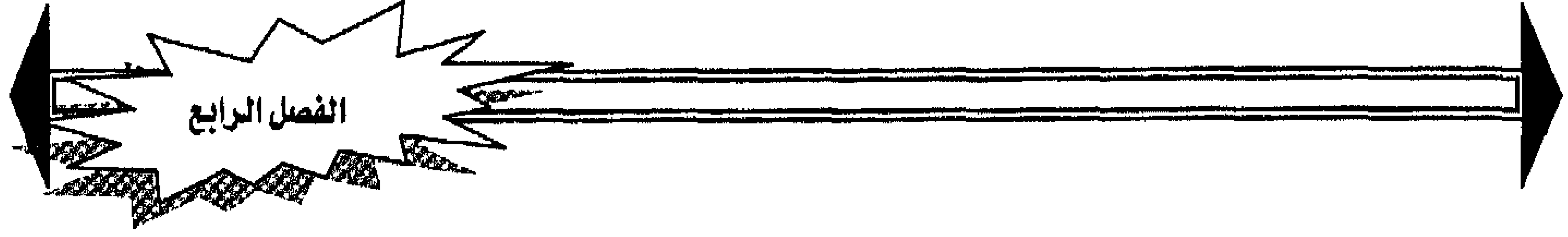
* ملحوظة: البيانات الأولية تصبح بيانات ثانوية بمجرد أن يستخدمها شخص أخر

- طرق جمع البيانات الأولية:

أ) المشاهدات والقياسات المباشرة كما قلنا سابقاً من السجلات أو بالاتصال المباشر.

ب) المشاهدات والقياسات غير المباشرة الاتصال مثل التلفزيون أو البريد.





جـ) طرق العد وتستخدم لتعداد السكان.

د) طريقة الاستبيان وتستخدم لقياس ظاهرة ما أو دراسة تأثير ظاهرة ما على المجتمع.

- طرق جمع البيانات الثانوية:

أ) المنشورات الصادرة عن المؤسسات الحكومية والعالمية.

ب) المنشورات التجارية الصادرة عن الجمعيات العالمية.

جـ) الأبحاث والرسائل العلمية والمراكز التعليمية.

د) الجرائد اليومية والدوريات.

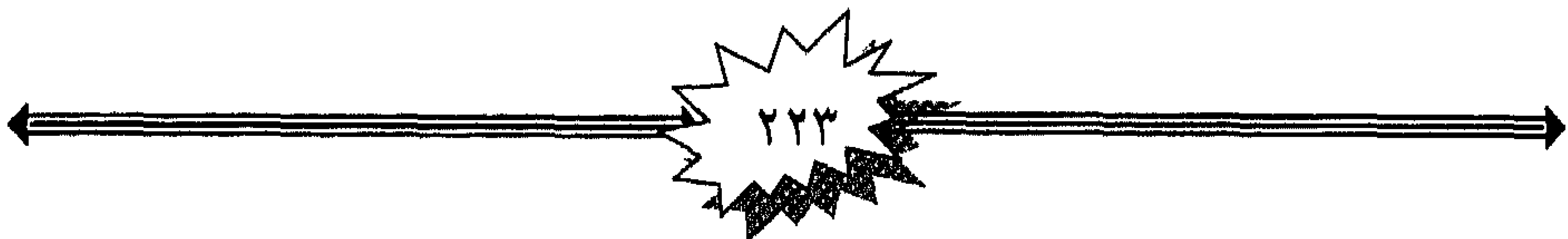
*** أسس تقسيم البيانات وهي:**

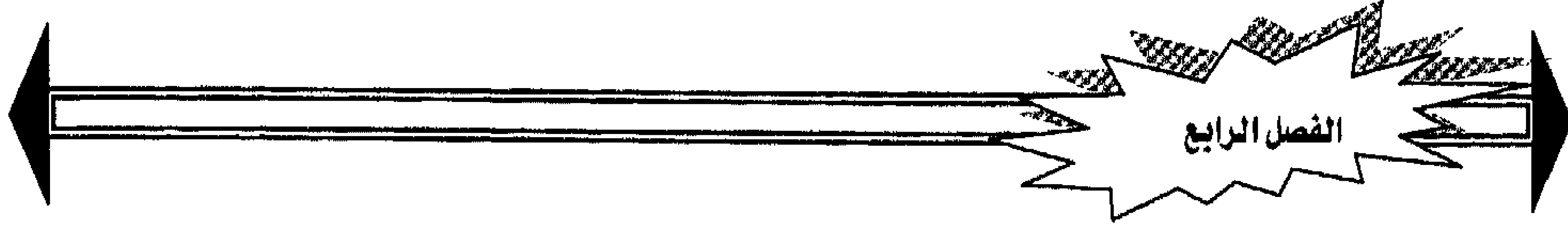
١) الوصف ← وفيه يتم تقسيم البيانات حسب النوع أو الصف كمثال تقسيم الناس إلى غني وفقير أو إلى متعلم وأمي أو إلى أبيض وأسود وهكذا.

٢) الكم ← وفيه يتم تقسيم البيانات حسب الكم والقياس كمثال تقسيم الطلاب إلى مجموعات كل حسب أطوالهم أو حسب أوزانهم أو حسب أعمارهم.

٣) المكان ← وفيها يتم تقسيم البيانات حسب المكان الجغرافي كمثال تقسيم المملكة إلى إمارات وكل إمارة لها معدل مواليد معين.

٤) الوقت ← وفيها يتم تقسيم البيانات حسب الوقت كمثال درجات الحرارة في الصيف تختلف عنها في الشتاء وهكذا.





*** المجتمع والعينة والفرق بينهما Population and Sample**

يمكن تعريف المجتمع بأنه جميع البيانات التي يمكن جمعها لظاهرة ما كمثال مجموعة درجات الطلاب لجامعة الملك سعود في المادة -١٠١- احصاء أو عدد الماكنيات الغير صالحة للعمل في مصنع ما وهكذا فكلمة مجتمع لا تعني بالضرورة أن تكون البيانات لأفراد بل يمكن أن تكون لحيوانات.

أما العينة فتعني أي مجموعة جزئية يمكن اختيارها من المجتمع وللعينة أهمية كبرى في دراسة المجتمع وخاصة عندما يكون المجتمع كبير أو غير محدود.

*** فروع الأحصاء:**

١) فرع الاحصاء الوصفي أوالاستنتاجي **Descriptive statistics:**

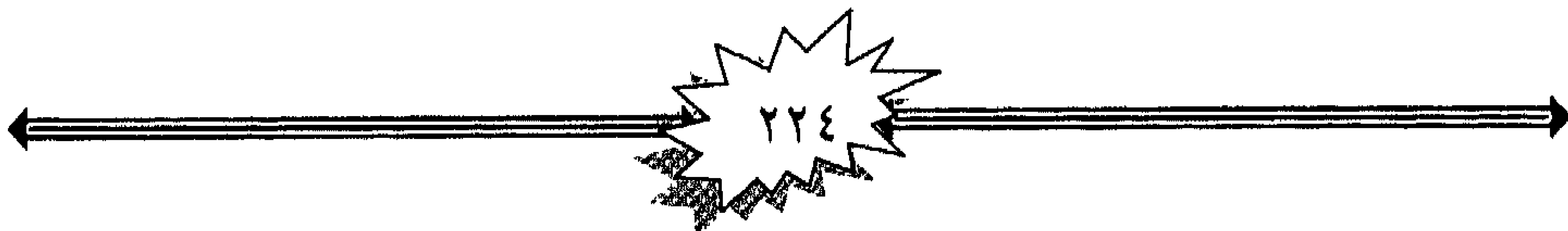
هو الفرع الذي يهدف إلى صف وتلخيص وتوضيح مجموعة ما من البيانات بهدف أخذ قرارات تتعلق بهذه المجموعة دون سواها.

٢) فرع الاحصاء الاستدلالي **Inductive statistics**

هو الفرع الذي يهدف لدراسة عينة مختارة بطريقة جيدة من مجتمع ما بهدف الوصول إلى تعميم عن خواص المجتمع. كمثال أخذ عينة من طلاب جامعة الملك سعود ودراسة أطوالهم ومحاولة الوصول إلى استنتاج ما عن مجموعة صغيرة من البيانات بدلاً من دراسة المجتمع ككل وبالتالي توفير الجهد والوقت والمال.

تعريف المتغيرات vaviables:

هي أي صفة يمكن أن تتغير من فرد لآخر كمثال العمر، الطول، الوزن،



الذكاء، اللون، وغيرها. ونلاحظ أن بعض المتغيرات قابل للقياس وتسمى متغيرات كمية أو عددية أما البعض الآخر غير قابل للقياس فيسمى متغيرات وصفية.

وتنقسم المتغيرات الكمية أو العددية إلى نوعين هما:

- متغيرات متصلة: **Continuous Variables**

وفيها يأخذ المتغير قيماً داخل فترة أي أن المتغير يأخذ قيماً لا نهائية ولا يمكن مناظرتها بمجموعة الأعداد الطبيعية (غير قابلة للعد).

- متغيرات منفصلة **Discrete variables**:

وفيها يأخذ المتغير عدد من القيم النهائية أو اللانهائية والتي يمكن مناظرتها مجموعة الأعداد الطبيعية (أي مجموعة من القيم قابلة للعد).

التوزيعات التكرارية Frequercy distributions

هي طريقة لترتيب وتنظيم البيانات الخام ووضعها بجدول مكوّن من عمودين. يتم تقسيم البيانات الخام إلى مجموعات وتحديد عدد البيانات المناظر لكل مجموعة أو ما يسمى بتكرار المجموعة وتوضع المجموعات المقسّمة في العمود الأول بينما يحوي العمود الثاني على هذه التكرارات.

مثال ١:

البيانات الآتية هي الأجور اليومية (٥٠ عامل بأحد المصانع بمنطقة القصيم معطاة بالريال. كون جدول للتوزيع التكراري لهذه الأجور.

٤٢	٢٧	٢٤	٢٤	٣٠	٢٣	١٥	١٨	٢٠	١٤
٤٠	٣٠	٢٩	٣٠	٢٥	٢٥	٢٤	٢٢	١٨	١٩
٢٥	٢٨	٢٦	٢٣	٢٤	٢١	٢٠	٢١	٣٠	٤٥
٤٣	٣٣	٣٢	٤٥	٢٠	٤٠	٢٠	٤٧	٢٤	٣٠
٢٠	١٨	٢	٣٠	٢١	٢٢	٢٠	٢٥	٣١	٣٠

الحل:

لاحظ لأن جميع القيم تتراوح بين ١٤ ريـال و ٤٧ ريـال وبالتـالي يكـون مدى هذه البيانات هو م ويعطى بالصورة:

(Range) المدى = أكبر قيمة - أقل قيمة

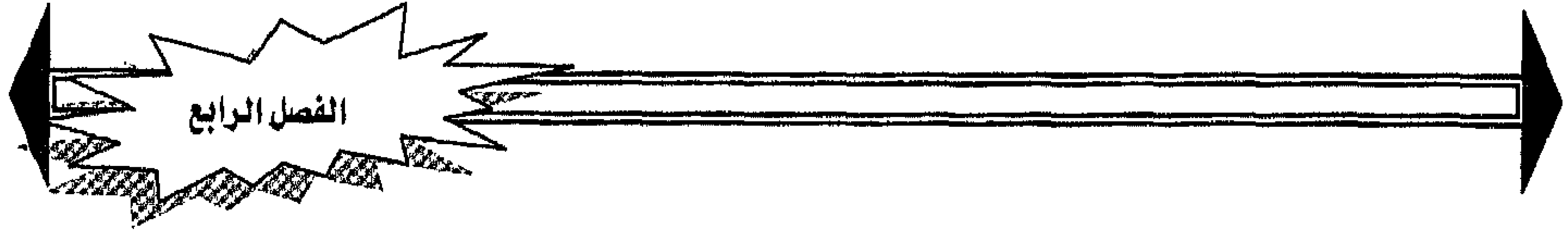
٤٧ ـ ١٤ = ٣٣ ريال هو المدى

وبتقسيم هذه البيانات إلى ٧ مجموعات كل مجموعة طولها ٥ فإن:

التكرار	العلامات	المجموعات
٥	~~////~~	١٤ ـ ١٨
١٤	//// ~~////~~ ~~////~~	١٩ ـ ٢٣
١٣	/// ~~////~~ ~~////~~	٢٤ ـ ٢٨
١١	/ ~~////~~ ~~////~~	٢٩ - ٣٣
.:		٣٤ ـ ٣٨
٤	////	٣٩ - ٤٣
٣	///	٤٤ ـ ٤٨
٥٠		المجموع

ويمكن اختصار هذا الجدول الآتي وذلك بحذف عمود العلامات:

المجموعات	١٤ـ ١٨	١٩ ـ ٢٣	٢٤ ـ ٢٨	٢٩ـ ٣٣	٣٤ ـ ٣٨	٣٩ ـ ٤٣	٤٤ ـ ٤٨
التكرار	٥	١٤	١٣	١١	صفر	٤	٣



ويمكن تلخيص خطوات تكوين الجدول التكراري كالآتي:

١. حساب مدى البيانات المعطاة وذلك بإيجاد الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة في البيانات.

٢. اختيار عدد مناسب للمجموعات بين ٥ – ٢٠ وذلك حسب البيانات المعطاة بحيث لا يكون هذا العدد صغير جداً فتضيع معالم البيانات المعطاة.

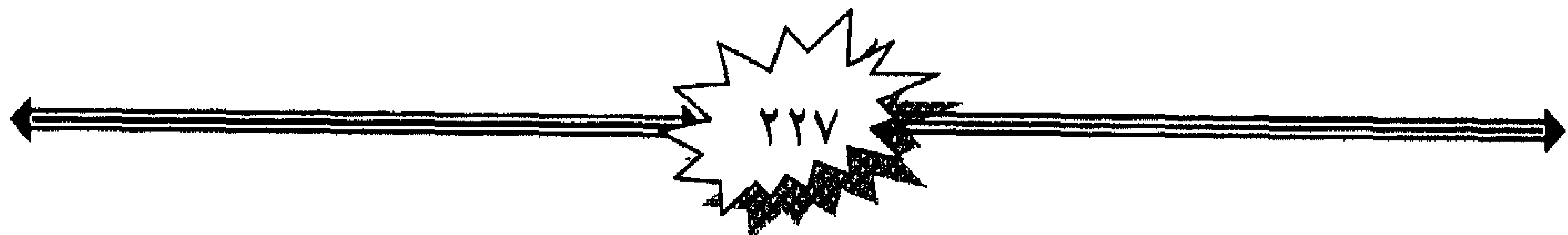
٣. بناءً على عدد المجموعات يتم حساب طول كل مجموعة وذلك بقسمة المدى على عدد المجموعات وتقريب العدد الناتج لأكبر عدد صحيح بمعنى إذا كان ناتج القسمة هو ٢ و ٤ فيقرب إلى العدد ٥.

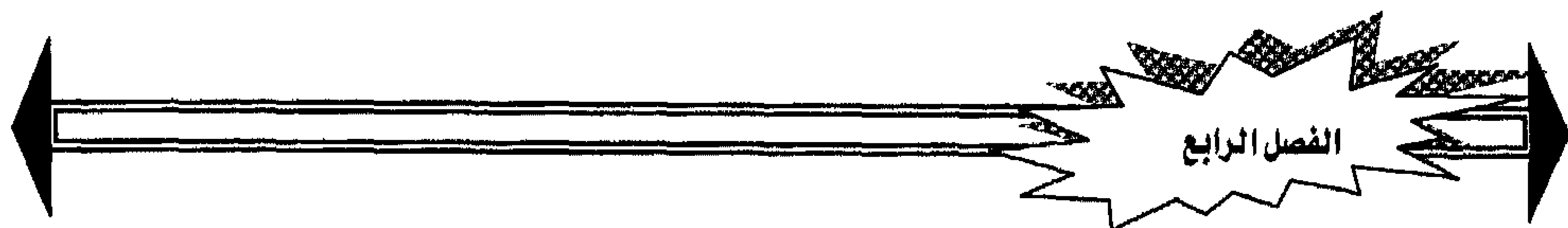
٤. يتم تحديد عدد المشاهدات (تكرار) المناظر لكل مجموعة ووضع المجموعات في عمود والتكرارات المناظرة في عمود آخر كما سبق.

التوزيع التكراري النسبي:

من المعروف أن التكرار المناظر لأي مجموعة هو العدد الكلي لمجموعة القيم التي تقع في هذه المجموعة ويرمز له بالرمز ~ وبالتالي فإن لكل مجموعة نسبة من المجموع الكلي للتكرارات وهو ما يسمى بالتكرار النسبي ويتم حساب التكرار النسبي لأي مجموعة وذلك عن طريق قسمة تكرار هذه المجموعة على المجموع الكلي للتكرارات وعادة نعبر عنه كنسبة:

$$\text{التكرار النسبي لمجموعة ما} = \frac{\text{التكرار المناظر لهذه المجموعة}}{\text{مجموع التكرارات الكلي}}$$





وهذا يعني أنه إذا كـان س هـو التكـرار المنـاظر للمجموعـة رقـم ي فـإن التكرار النسبي المناظر لهذه المجموعة هو $\bar{س}$ لكل ويعطى بالصورة:

$$\bar{س}_{ي} = \frac{س_{ي}}{\sum_{ي=1}^{ن} س_{ي}}$$

حيث $\sum$ $\sum_{ي=1}^{ن} س_{ي} = س_{1} + س_{2} + \ldots\ldots + س_{ن}$ من الواضح أن مجمـوع التكرارات النسبية هو الواحد الصحيح.

ملحوظة:

١. غالباً ما تستخدم التكرارات النسبية للمقارنة بين توزيعين تكرارين أو أكثر أو المقارنة بين تكرار مجموعتين لنفس التوزيع التكراري.

٢. لاحظ أن التكرارات النسبية ليس لها تميز.

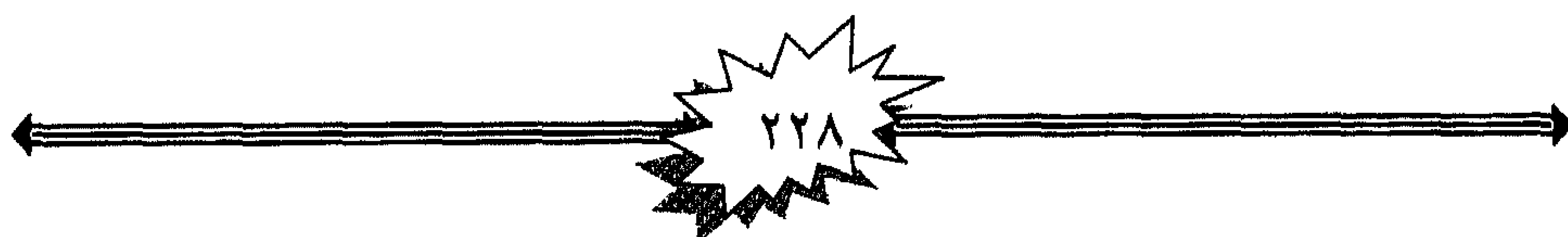
٣. يعرف التكرار المئوي بأنه التكرار النسبي مضروب في مائـة وبالتـالي فـإن مجموع التكرارات المئوية يساوي ١٠٠٪ (لماذا)؟

مثال ٢:

أوجد توزيع التكرار النسبي في المثال ١.

الحل:

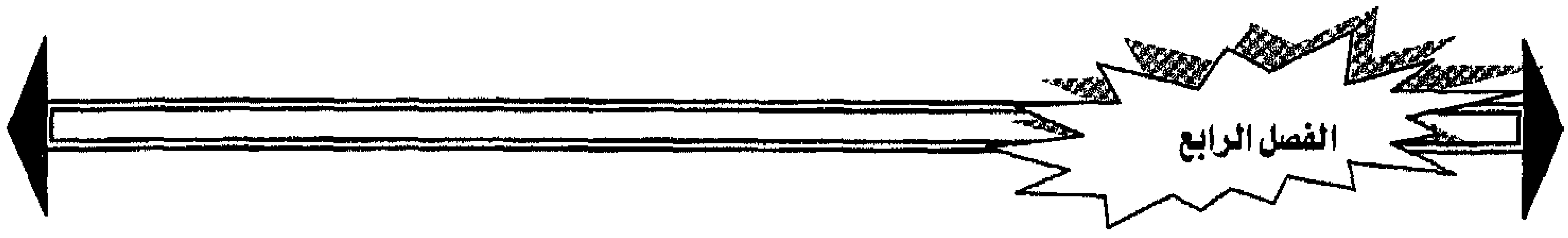
بإيجاد التكرار النسبي لكل مجموعة ووضع القيم المناظرة لكـل مجموعـة في جدول كالجدول الآتي فـإذا أردنـا كمثـال حسـاب التكـرار النـسبي للمجموعـة الأولى فيكون وبالمثل لبقية المجموعات فإن الجدول المطلوب يكون على الصورة:



التكرار المئوي	التكرار النسبي	المجموعات
١٠ ٪	$\frac{٥}{٥٠}$ = ٠,١٠	١٤ ـ ١٨
٢٨ ٪	$\frac{١٤}{٥٠}$ = ٠,٢٨	١٩ ـ ٢٣
٢٦ ٪	$\frac{١٣}{٥٠}$ = ٠,٢٦	٢٤ ـ ٢٨
٢٢ ٪	$\frac{١١}{٥٠}$ = ٠,٢٢	٢٩ - ٣٣
٠٫٠ ٪	$\frac{٠}{٥٠}$ = صفر	٣٤ - ٣٨
٨ ٪	$\frac{٤}{٥٠}$ = ٠,٠٨	٣٩ - ٤٣
٦ ٪	$\frac{٣}{٥٠}$ = ٠,٠٦	٤٤ ـ ٤٨
١٠٠ ٪	١,٠	المجموع

مركز المجموعة:

في المثال السابق وجدنا أن الأجور قد سجلت لأقرب ريال وبالتالي فإن المجموعة ١٤ ـ ١٨ يكون لها الحد الأدنى ١٤ أما الحد العلوي فهو ١٨ ويمكننا تعريف مركز المجموعة على أنه منتصف هذه المجموعة ويمكن الحصول عليه بجمع الحد الأدنى والحد العلوي وقسمة المجموع على اثنين فمركز المجموعة ١٤ ـ ١٨ هو (١٤ + ١٨) / ٢ أي ١٦ وهكذا يمكن تعيين جميع مراكز المجموعات المعطاة.



حدود المجموعة الفعلية:

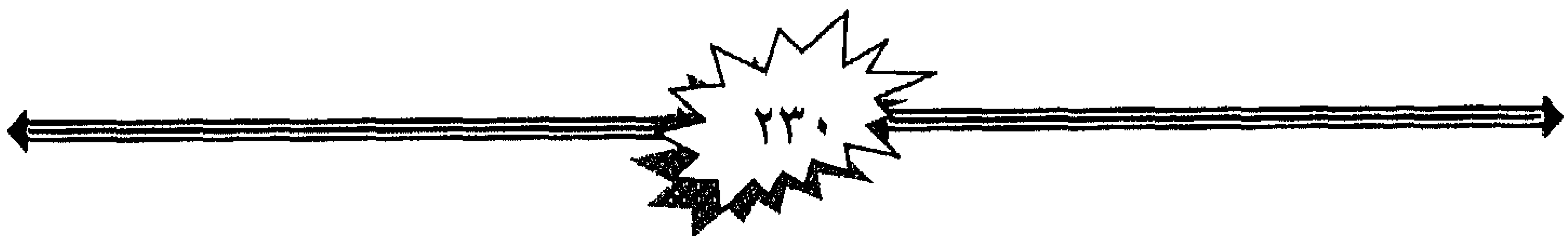
ونلاحظ أن المجموعة ١٤ – ١٨ تحتوي ضمنياً على كل الأجور التي لها الشكل ١٣,٥ ريال إلى ١٨,٥ ريال وبالتالي يكون من المستحب التعامل مع مجموعات لها صفة الاتصال بمعنى أن لا تكون هناك أية فواصل بين المجموعات بعضها البعض ويتم عمل ذلك بطرح ٠,٥ في حالة الأعداد الصحيحة من الحد الأدنى للمجموعة وإضافته للحد العلوي لنفس المجموعة وبذلك نحصل على الحدود الفعلية للمجموعة. ويسمى الحد الأدنى بعد عملية الطرح هذه بالحد الأدنى الفعلي للمجموعة كما يسمى الحد العلوي بعد عملية الإضافة بالحد العلوي الفعلي للمجموعة.

ملحوظة:

١. يمكن تعيين القيمة المطروحة من الحد الأدنى أو الإضافة إلى الحد الأعلى عن طريق جمع الحد الأعلى لأي مجموعة (في حالة المجموعات المتساوية الطول) مع الحد الأدنى للمجموعة التالية وقسمة الناتج على اثنين ويمكن ملاحظة ما إذا كانت المسافة الفاصلة بين أي مجموعتين هي الواحد فإننا نقوم بطرح وإضافة ٠,٥ أما إذا كانت المسافة الفاصلة ٠,١ فإنالقيمة المطروحة والمضافة هي ٠,٠٥ وهكذا.

٢. يمكن حساب مركز المجموعة أيضاً باستخدام الحدود الفعلية كالآتي:

$$\text{مركز مجموعة ما} = \frac{\text{الحد الأدنى الفعلي للمجموعة + الحد العلوي الفعلي لها}}{2}$$



مثال ٣:

أوجد الحدود الفعلية ومراكز المجموعات للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	٠ ـ ٩	١٠ ـ ١٩	٢٠ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٩	٦٠ ـ ٦٩
التكرار	٣	١٠	١٢	١٦	١١	٨	٢

الحل:

بإيجاد الحدود الفعلية للمجموعات وذلك بطرح ٠,٥ من الحدود الدنيا للمجموعات وإضافته إلى حدودها العليا.

التكرار	مراكز المجموعات	الحدود الفعلية للمجموعات	المجموعات
٣	٤,٥ = $\frac{-٠,٥+٩,٥}{٢}$	٠,٥ ـ ٩,٥	٠ ـ ٩
١٠	١٤,٥ = $\frac{٩,٥+١٩,٥}{٢}$	٩,٥ ـ ١٩,٥	١٠ ـ ١٩
١٢	٢٤,٥ = $\frac{١٩,٥+٢٩,٥}{٢}$	١٩,٥ ـ ٢٩,٥	٢٠ ـ ٢٩
١٦	٣٤,٥ = $\frac{٢٩,٥+٣٩,٥}{٢}$	٢٩,٥ ـ ٣٩,٥	٣٠ ـ ٣٩
١١	٤٤,٥ = $\frac{٣٩,٥+٤٩,٥}{٢}$	٣٩,٥ ـ ٤٩,٥	٤٠ ـ ٤٩
٨	٥٤,٥ $\frac{٤٩,٥+٥٩,٥}{٢}$	٤٩,٥ ـ ٥٩,٥	٥٠ ـ ٥٩
٢	٦٤,٥ = $\frac{٥٩,٥+٦٩,٥}{٢}$	٥٩,٥ ـ ٦٩,٥	٦٠ ـ ٦٩

جداول التكرارات الثنائية (المشتركة) Bivariate Frequency table

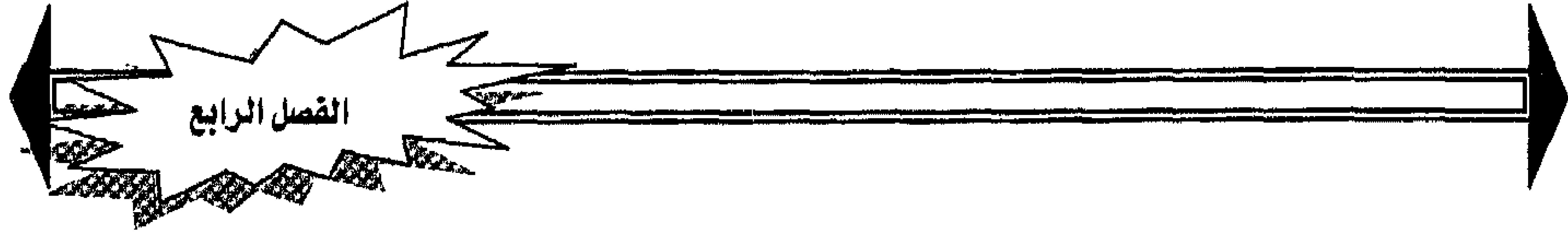
تستخدم هذه الجداول في العديد من مسائل الاحصاء وبخاصة تلك التي تقوم بدراسة العلاقة بين ظاهرتين مختلفتين لهما تكرارات مشتركة. فإذا كانت عدد البيانات الخام لكلا الظاهرتين محدود فيمكن وضع قيم المتغيرات التي تمثل هاتين الظاهرتين في صورة أزواج مرتبة يسهل التعامل معها. أما إذا كان عدد البيانات كبير وبتكرارات معينة فلا يمكن عمل ذلك ويلزم وضع هذه البيانات في صورة مجموعات لها تكرارات مشتركة ولتوضح ذلك نعطى المثال الآتي:

رقم الجامعي للطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
درجات الإحصاء	١٦	٢	٤	٦	١٦	١	١٠	٦	٣	١٧	٧	١٩
درجات الرياضيات	١٢	٠	٣	٧	١٠	٨	١٦	٨	٥	١٠	١١	١٩
رقم الجامعي للطالب	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤
درجات الاحصاء	١٥	٥	٦	٩	١٧	١٠	١٧	٩	٧	١٠	٩	١٧
درجات الرياضيات	١٠	٦	٧	١٠	١١	١٢	١٦	١١		١٢	١١	١٤

مثل هذه البيانات باستخدام الجدول التكرار ي الثنائي أوالمشترك.

الحل:

في هذا المثال لدينا ظاهرتين هما درجات الطلاب في مادة الاحصاء والأخرى في مادة الرياضيات. مدى هذه الدرجات يتراوح بين ٠ – ٢٠ في كلا المادتين وبأخذ طول المجموعة ٥ فإن عدد المجموعات المطلوب هو ٤ مجموعات

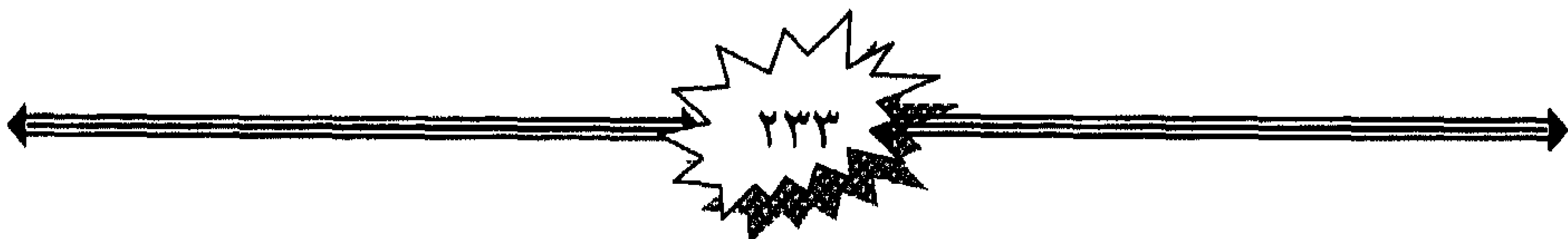


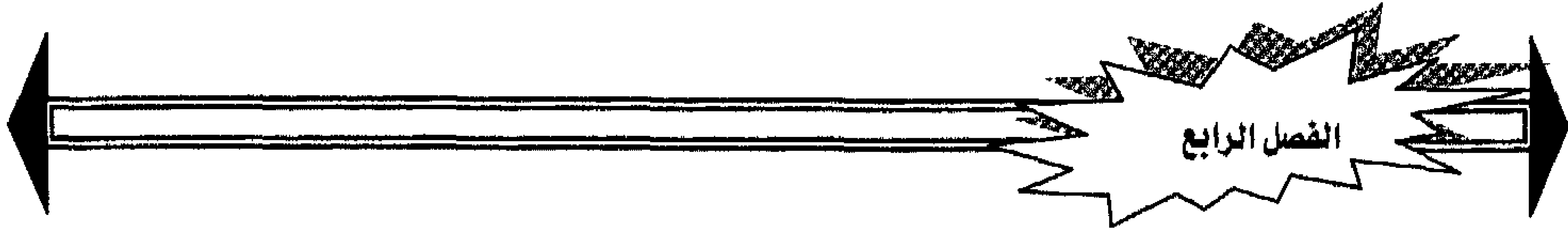
هي ∴– ٤، ٥ - ٩، ١٠-١٤، ١٥ - ١٩ وبتحديد عدد الطلاب اللـذين تقـع درجاتهم في كل مجموعة فنحصل على الجدول الآتي:

درجات الرياضيات / درجات الاحصاء	∴- ٤	٥ – ٩	١٠ – ١٤	١٥ – ١٩	المجموع
∴- ٤	٢	٢	∴	∴	٤
٥ – ٩	∴	٥	٤	∴	٩
١٠ – ١٤	∴	∴	٢	∴	٢
١٥ – ١٩	∴	∴	٦	٣	٩
(Sum) المجموع	٢	٧	١٢	٣	٢٤

الجداول التكرارية الهامشية والتكرار الشرطي:

في أغلب الأحيان يلزم معرفة إيجاد الجدول التكـراري لكـل ظـاهرة علـى حدى متى علم الجدول التكـراري المـشترك وهـذه الجـداول يطلـق عليهـا اسـم الجداول التكرارية الهامشية. وفيها يتم جمع كل التكرارات الموجـودة بالـصف أو العمود المناظر للمجموعة المراد إيجاد تكرارها فيكـون هـذا المجمـوع النـاتج هـو التكرار المطلوب ففي المثال السابق لإيجاد التكرار الهامشي المناظر للمجموعـة ∴ – ٤ لدرجات الاحصاء فيكون مجموع التكـرارات الموجـودة بهـذا الـصف هـي ٢ + ٢ + ∴ + ∴ فيكـون التكـرار الهامـشي للمجموعـة ∴– ٤ مـن درجـات الاحصاء بغض النظر عن الدرجات في الرياضيات هو ٤ وبالمثـل لكـل مجموعـة وبجمع عـدد الطـلاب في كـل صـف تحـصل علـى التكـرار الهامـشي لـدرجات الرياضيات وبالتالي فإن جدول التكرار الهامشي للاحصاء هو:





درجات الاحصاء	٠ - ٤	٥ – ٩	١٠ – ١٤	١٥ – ١٩	المجموع
عدد الطلاب	٤	٩	٢	٩	٢٤

جدول التكرار الهامشي للرياضيات هو:

درجات الاحصاء	٠ - ٤	٥ – ٩	١٠ – ١٤	١٥ – ١٩	المجموع
عدد الطلاب	٢	٧	١٢	٣	٢٤

مثال ٥:

في التوزيعات الهامشية السابقة أوجد الحدود الفعلية للمجموعات ومراكزها.

الحل:

يترك للطالب كتمرين.

* التوزيع التكراري المتجمع (التراكمي) والمنحنى التكراري المتجمع

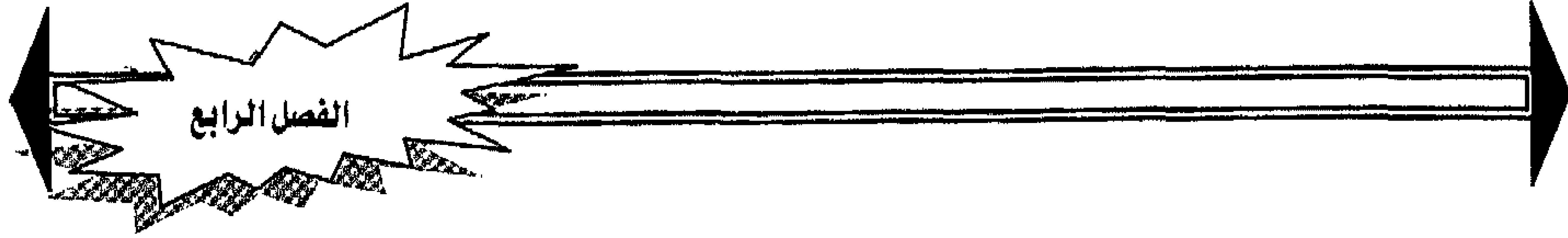
التكرار المتجمع لمجموعة ما هو مجموع كل تكرار المجموعات السابقة لهذه المجموعة ومضافاً إليه تكرار المجموعة نفسها هذا يعني أن التكرار المتجمع أو التراكمي ما هو إلاّ إضافة تكرار المجموعة المراد تعيين التكرار المتجمع لها إلى كل تكرارات المجموعات السابقة لها.

ولرسم المنحنى التكراري المتجمع لتوزيع تكراري معين يتم أولاً تعيين التوزيع التكراري المتجمع لها التوزيع ويمكن عمل ذلك بطريقتين هما:

١ . إيجاد التكرار المتجمع الصاعد (أقل من) Cumulating up wards

هو جدول مكوّن من عمودين، العمود الأول يحتوي على مجموع





التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأدنى الفعلي للمجموعات ويبدأ تدريجياً من القيمة ∴ إلى أعلى قيمة وهي مجموع التكرارات الكلي ويسمى بالجدول التكراري المتجمع الصاعد.

مثال ٦:

أوجد الجدول التكراري المتجمع الصاعد لهذه البيانات:

درجات الاحصاء	١٠ ــ ١٢	١٣ ــ ١٥	١٦ ــ ١٨	١٩ ــ ٢١	المجموع
عدد الطلاب	٥	١١	١٥	٤	٣٥

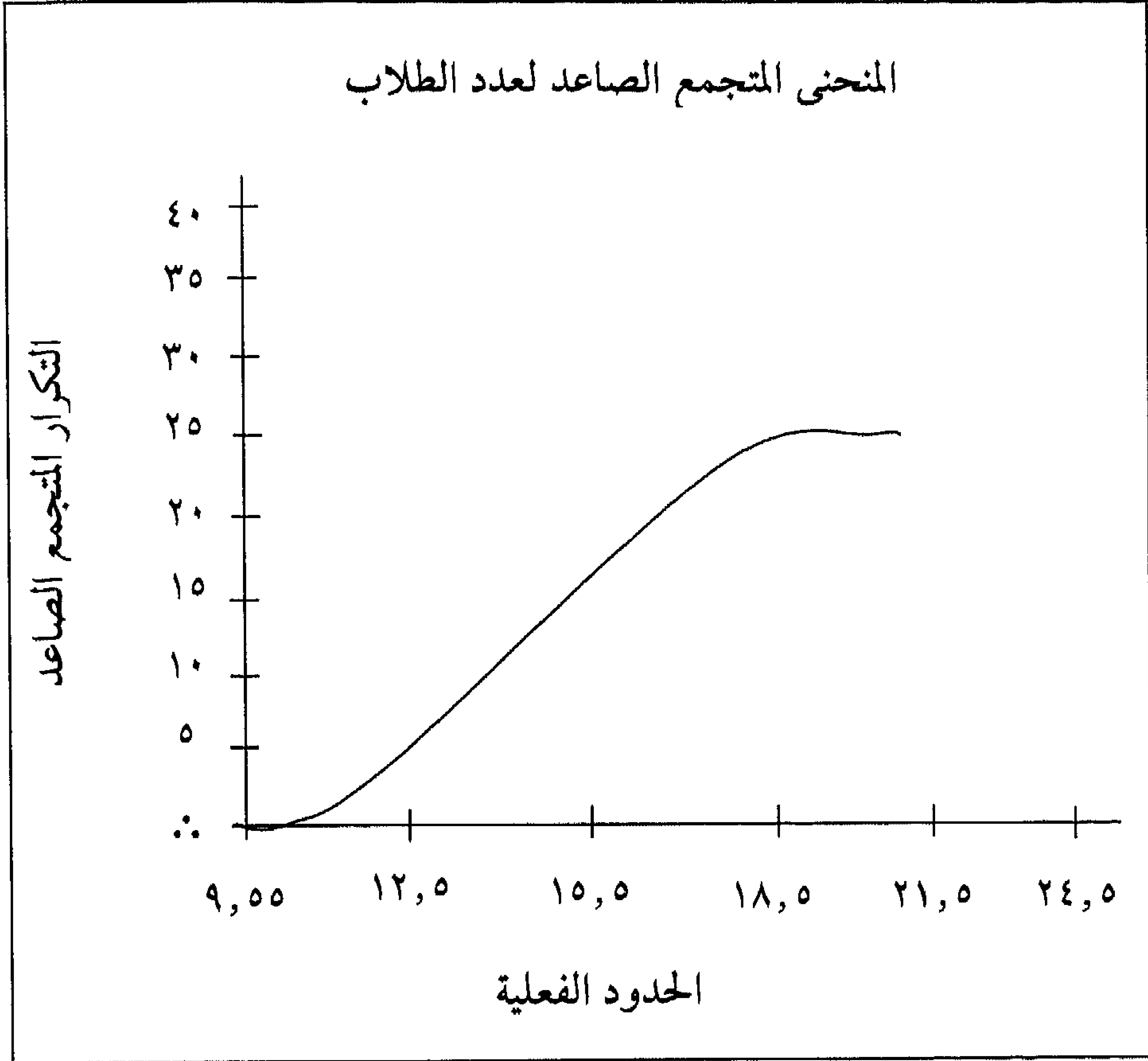
الحل:

بتكوين جدول مكوّن من عمودين الأول يحتوي على الحدود الدنيا الفعلية للمجموعات أما العمود الثاني فيحتوي على التكرار المتجمع الصاعد فإذا أردنا إيجاد عدد الطلاب التي تكون درجاتهم أقل من ١٥,٥ فإننا نقوم بجمع عدد الطلاب الذي تكون درجاتهم بين ٩,٥ و ١٥,٥ فيكون ∴+ ٥ + ١١ أي أن الناتج هو ١٦ وهكذا لبقية القيم كالآتي:

التكرار المتجمع الصاعد لعدد الطلاب	أقل من الحدود الدنيا للمجموعة	
∴	أقل من	٩,٥
٥	أقل من	١٢,٥
١٦	أقل من	١٥,٥
٣١	أقل من	١٨,٥
٣٥	أقل من	٢١,٥

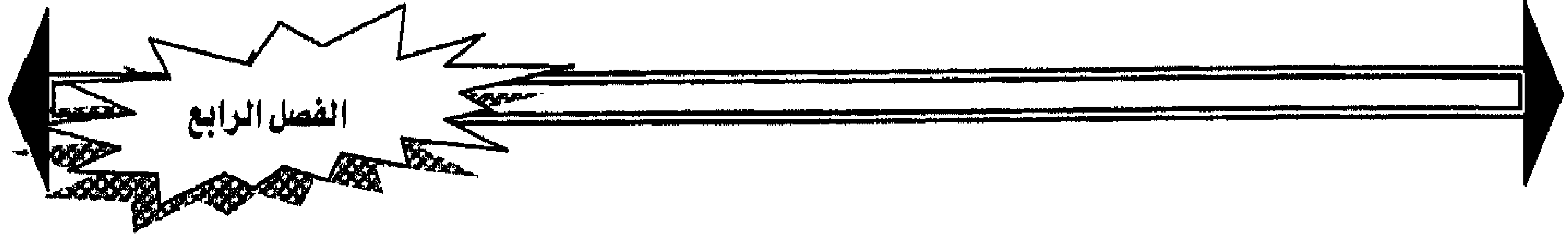


وبرسم هذه القيم يكون المنحنى التكراري المتجمع الصاعد له الشكل الآتي:



٢. إيجاد التكرار المتجمع النازل (أكبر من) Cumulating down wards

هو جدول مكون من عمودين، العمود الأول يحتوي على مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأكبر من الحد الأدنى الفعلي للمجموعات ويبدأ التكرار المتجمع النازل من أعلى قيمة مجموع التكرارات الكلي ويقل تدريجياً حتى القيمة .٠:



مثال ٧:

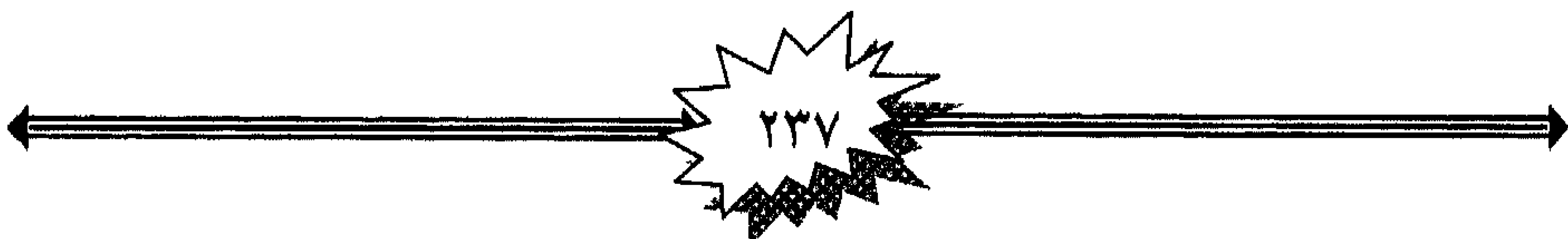
أوجد الجدول التكراري المتجمع النازل لهذه البيانات

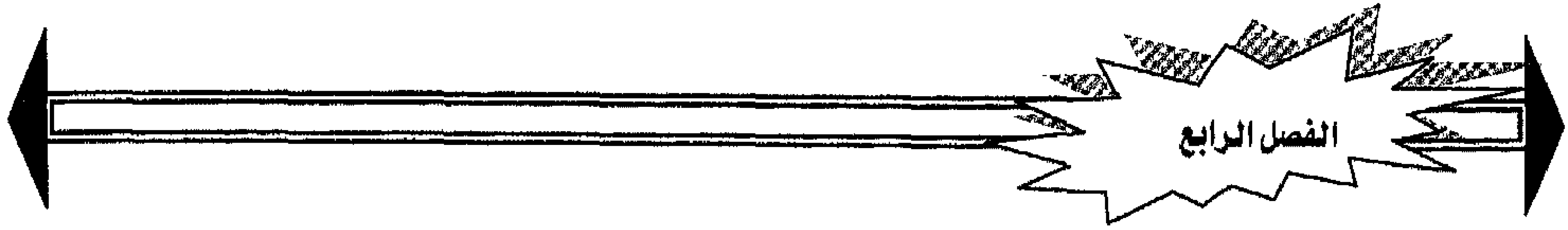
درجات الاحصاء	١٠ ـ ١٢	١٣ ـ ١٥	١٦ ـ ١٨	١٩ ـ ٢١	المجموع
عدد الطلاب	٥	١١	١٥	٤	٣٥

الحل:

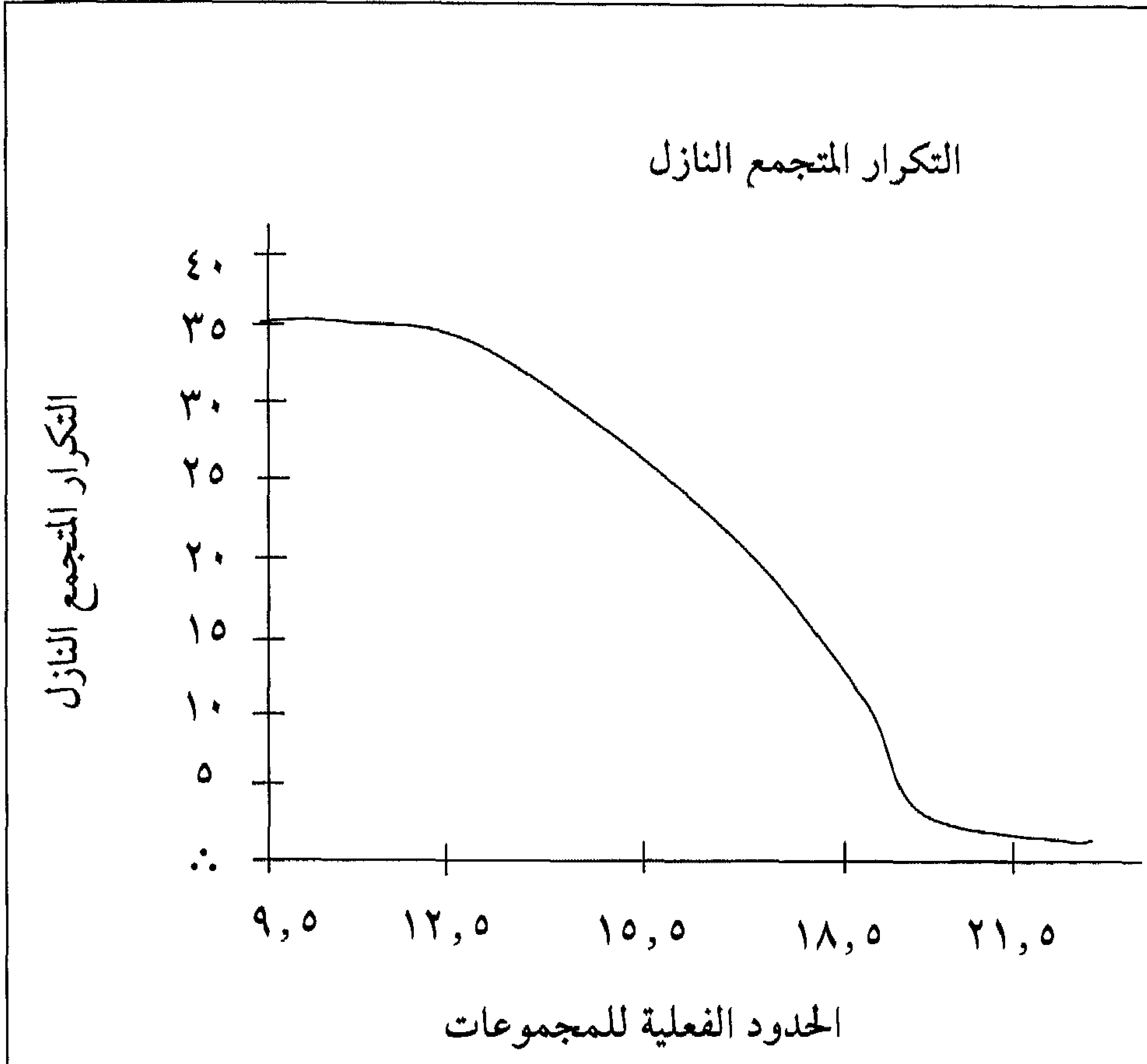
بتكوين جدول مكوّن من عمودين الأول يحتوي على الحدود الفعلية للمجموعات أمّا العمود الثاني فيحتوي على التكرار المتجمع النازل فإذا أردنا إيجاد عدد الطلاب اللذين حصلوا على أكبر من ٩,٥ كان الناتج هو جميع الطلاب وهو ٣٥ أمّا الذين حصلوا على أكثر من ١٢,٥ فإننا نقوم بطرح عدد الطلاب الذين تكون درجاتهم بين ١٩,٥ و ١٢,٥ يكون الناتج (٣٥ ـ ٥ = ٣٠) أي ٣٠ ويمكن عمل ذلك لجميع القيم كالآتي:

التكرار المتجمع النازل لعدد الطلاب	أكبر من الحدود الدنيا للمجموعة	
٣٥	أكبر من	٩,٥
٣٠	أكبر من	١٢,٥
١٩	أكبر من	١٥,٥
٤	أكبر من	١٨,٥
٠	أكبر من	٢١,٥





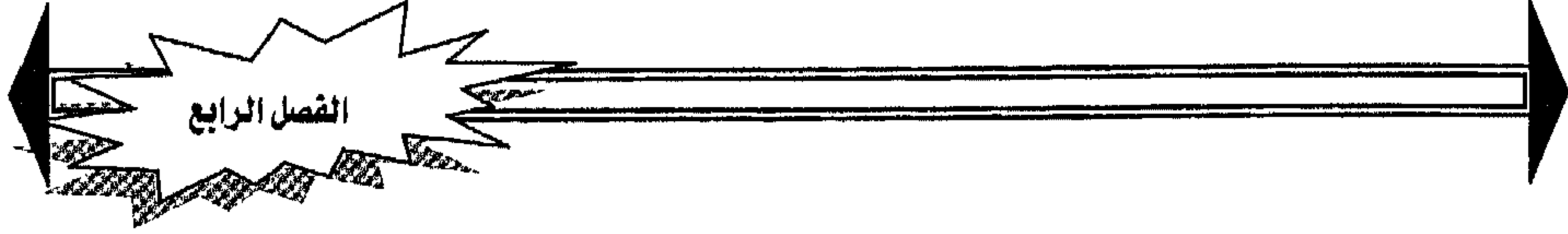
وبرسم هذه القيم يكون المنحنى التكراري المتجمع النازل له الشكل الآتي:



مثال ٨:

إذا كان التوزيع التكراري الآتي يمثل أطوال ١٠٠ طالب بالصف الابتدائي موزعين كالآتي:





طول الطالب بالم	١٠٠ ـ ١١٩	١٢٠ ـ ١٢٩	١٣٠ ـ ١٣٩	١٤٠ ـ ١٤٩	١٥٠ ـ ١٥٩	المجموع
عدد الطلاب	١٠	١٥	٣٥	٢٥	١٥	١٠٠

أوجد الجداول التكرارية المتجمعة الصاعدة والنازلة وأرسمها.

الحل:

يترك للطالب كتمرين.

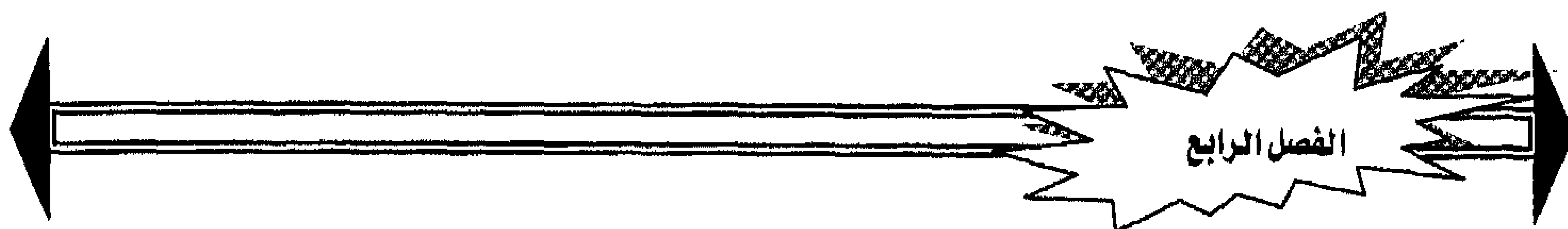
❖ الرسوم والتمثيل البياني Diagrams & Graphs

كما ذكرنا سابقاً أن علم الاحصاء هو العلم الذي يهتم بجمع وتنظيم وعرض وتحليل البيانات بهدف الوصول إلى معلومات تفيد في أخذ القرارات السليمة على ضوء ذلك التحليل. ولما كان أحد أهداف علم الاحصاء هو تنظيم وتلخيص البيانات فكانت الوسيلة التوضيحة لذلك هي طرق الرسوم والتمثيل البياني. فهي تستخدم لتبسيط وإعطاء فكرة مبّسطة عن خصائص تلك البيانات وذلك بهدف عمل مقارنة سريعة بين هذه البيانات فيستفيد منها العديد من يعملون بالاقتصاد والمال. فرجال الأعمال والمال لا يجدون الوقت الكافي لكي يحللون البيانات ذات الأحجام الكبيرة لكنهم يجدون في هذه الرسومات وطرق التمثيل البياني وسيلتهم لأخذ المعلومات السريعة اللازمة لهم.

❖ أنواع الرسوم البيانية Type of diagrams

هناك العديد من الرسوم البيانية والتي تمكنا من تمثيل البيانات الاحصائية بطريقة سهلة وواضحة ونذكر منها:





١ . *الرسم البيانية ذات البعد الواحد* ***One dimensional diagrqms***

هي طرق بيانية تستخدم عندما يكون هناك عامل واحد أو ظاهرة واحدة يُراد دراستها وتحليل تأثيرها مثل تعداد السكان في أكثر من مدينة أو دولة أو مثل إنتاج مجموعة مصانع تمتلكها شركة واحدة وهكذا. في هذه الحالة يتم تمثيل هذا العامل أو هذه باستخدام طول أو ارتفاع خط مستقيم حيث يعين خط مستقيم لكل سنة أو لكل مصنع والاختلاف بينهم يكون في ارتفاع أو طول هذا الخط ومن هذا الرسوم ذات البعد الواحد نذكر منها:

أ - الأعمدة البيانية البسيطة **Simple bars**

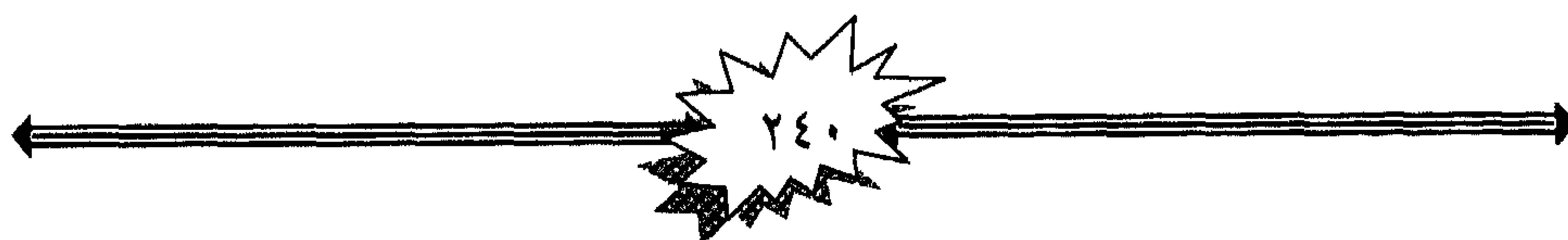
تمثل كل حالة بعمود يتناسب ارتفاعه مع القراءة وبغض النظر عن عرض هذا العمود.

مثال ٩:

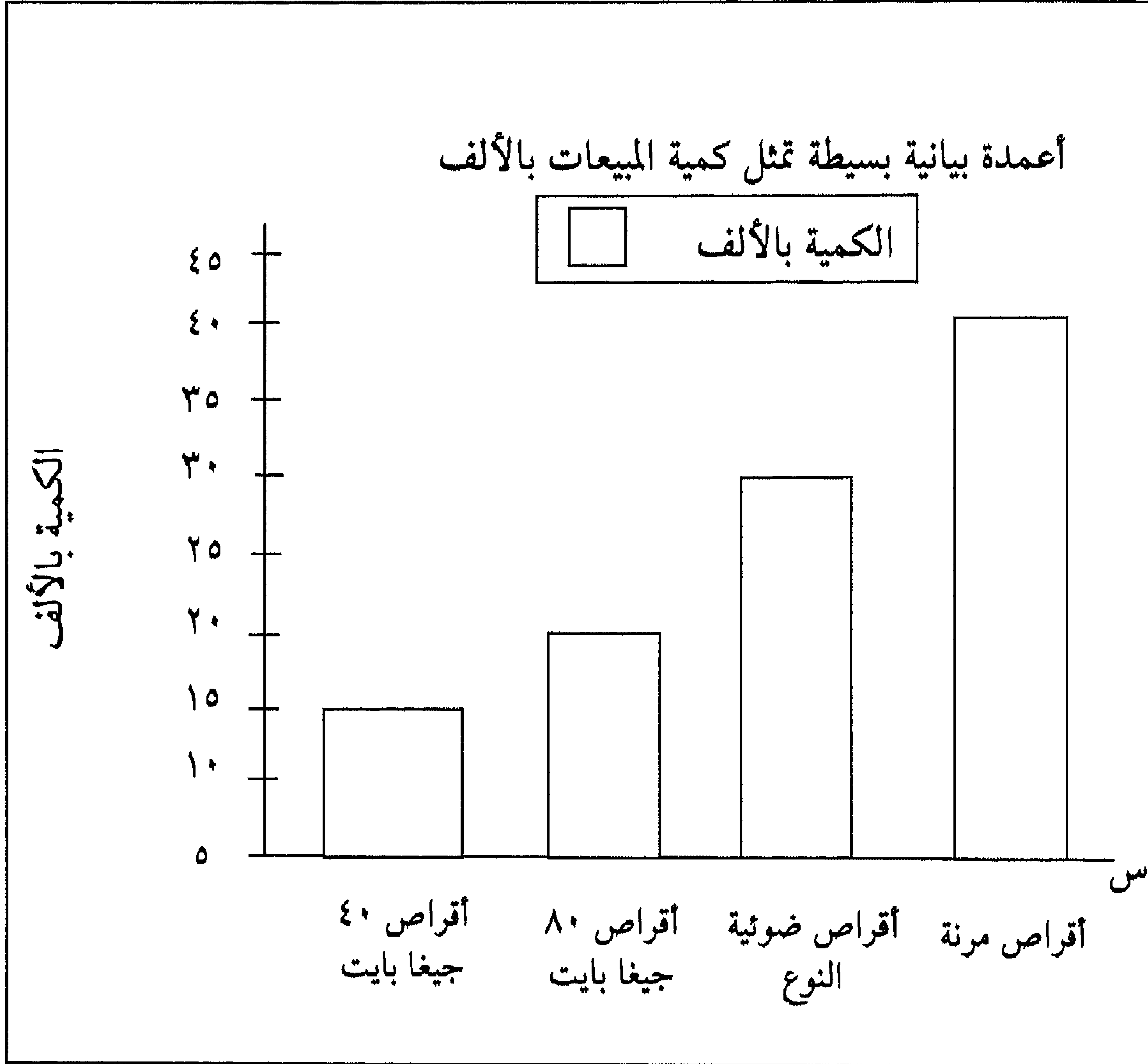
كانت مبيعات أحد الشركات خلال السنة الماضية كالآتي:

النوع	أقراص صلبة سعة ٤٠ جيغا بايت	أقراص صلبة سعة ٨٠ جيغا بايت	أقراص ضوئية	أقراص مرنة سعة ١,٤٤ ميغا بايت
الكمية بالألف	١٥,٥	٢٠,٤	٣٠,٨	٣٨,٣

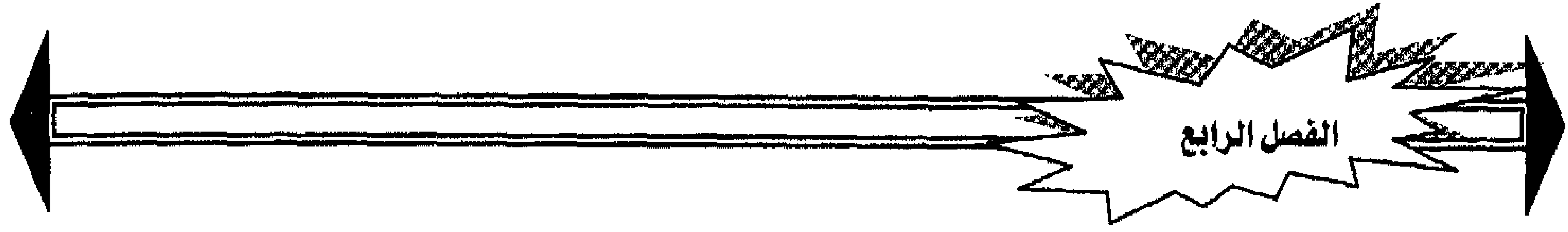
مثل هذه البيانات باستخدام الأعمدة البيانية البسيطة.



الحل:



برسم الاحداثيات المتعامدة س و ص وبجعل محور س يمثل النوع أما محور ص فيمثل الكمية المباعة بالألف



ب - الأعمدة البيانية المتعددة Multiple bars

تمثل كل حالة بعمود يتناسب ارتفاعه مع القراءة المعطاة وبغض النظر عن عرض هذا العمود وتستخدم هذه الأعمدة للمقارنة بين ظاهرتين أو أكثر وذلك برسم عمودين أو أكثر حسب عدد الظواهر الموجودة وتلوّن أعمدة كل ظاهرة بلون مختلف عن الأعمدة الأخرى. وتسمى هذه الأعمدة بالأعمدة المزدوجة في حالة وجود ظاهرتين فقط أما في حالة وجود ثلاث ظواهر فتسمى بالأعمدة الثلاثية وهكذا.

مثال ١٠:

إذا كانت مبيعات أحد الشركات الحاسب الآلي بالألف خلال عامي ٢٠٠٢، ٢٠٠١ هي كالآتي:

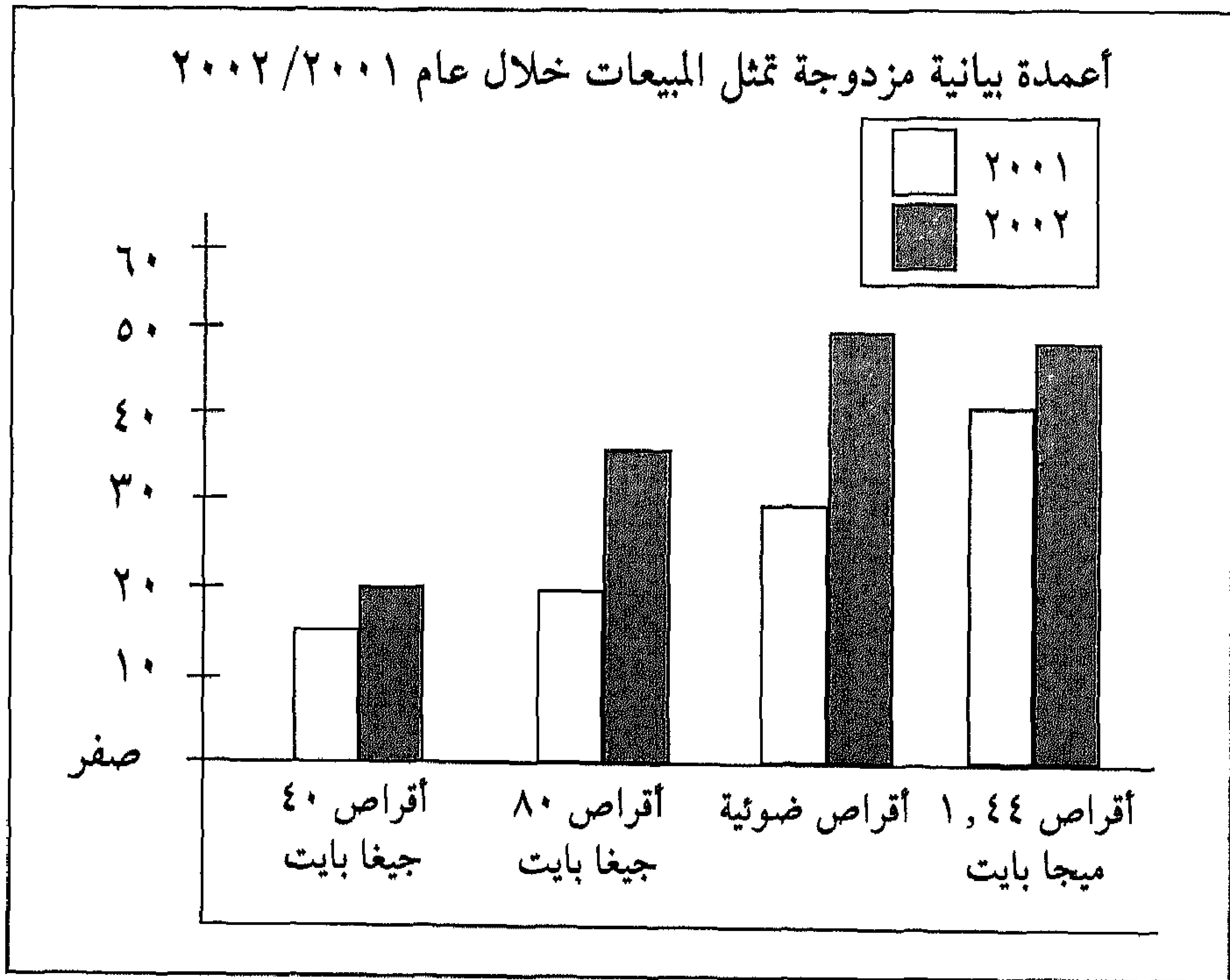
النوع	أقراص صلبة سعة ٤٠ جيغا بايت	أقراص صلبة سعة ٨٠ جيغا بايت	أقراص ضوئية	أقراص مرنة سعة ١,٤٤ ميغا بايت
عام ٢٠٠١	١٥,٥	٢٠,٤	٣٠,٨	٣٨,٣
عام ٢٠٠٢	١٨	٣٤	٥٠	٣٩,٤

مثل باستخدام الأعمدة المزدوجة للمبيعات خلال عامي ٢٠٠٢، ٢٠٠١



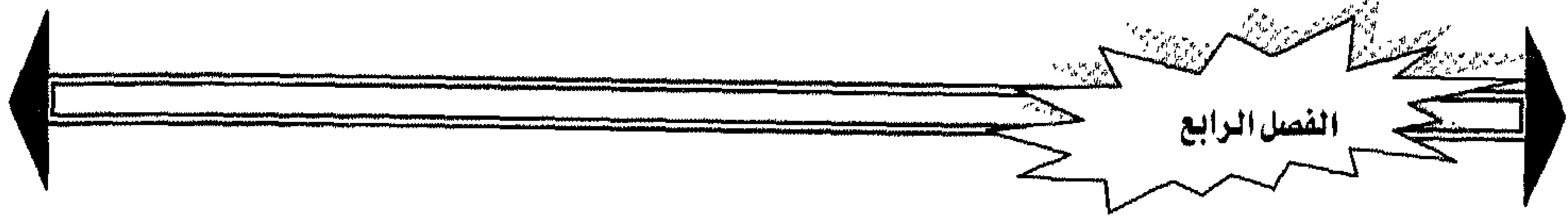
الحل:

نقوم برسم عمودين متلاصقتين لكل نوع كالآتي:



ج - الأعمدة البيانية المجزأة Sub – Divided Bars

تستخدم هذه الأعمدة عندما يكون لدينا ظاهرة ما ومقسمة لعدة مركبات فنقوم برسم عمود يمثل هذه الظاهرة وتقسيمة إلى أجزاء كل جزء يتناسب مع قيم مركبات هذه الظاهرة كمثال تعداد السكان لأكثر من مدينة ومقسم هذا



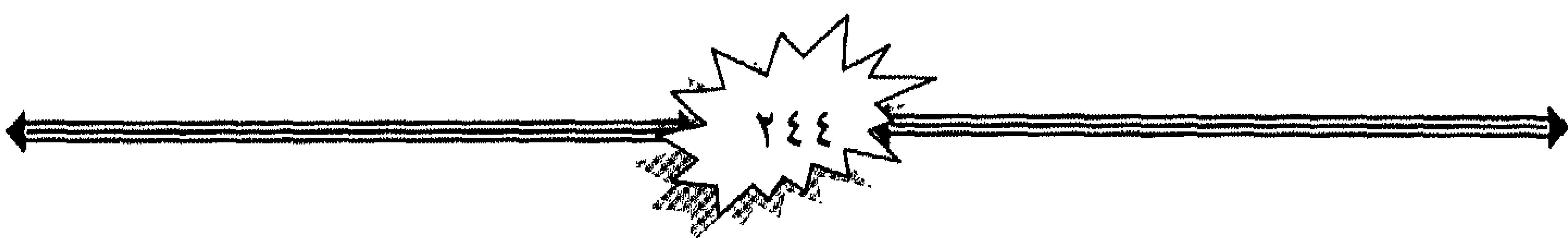
التعداد إلى بنين وبنات أو تجارة دولة معينة مقسم إلى صادرات وواردات وهناك نوعان من الأعمدة المجزئة النوع الأول يعتمد على القيم المباشرة للبيانات المعطاة ويسمى بالأعمدة المجزئة البسيطة أما النوع الثاني فيعتمد على النسبة المئوية لأجزاء الظاهرة ويسمى الأعمدة المجزأة المئوية وسوف نكتفي بأخذ أمثلة على النوع الأول فقط.

مثال (١١):

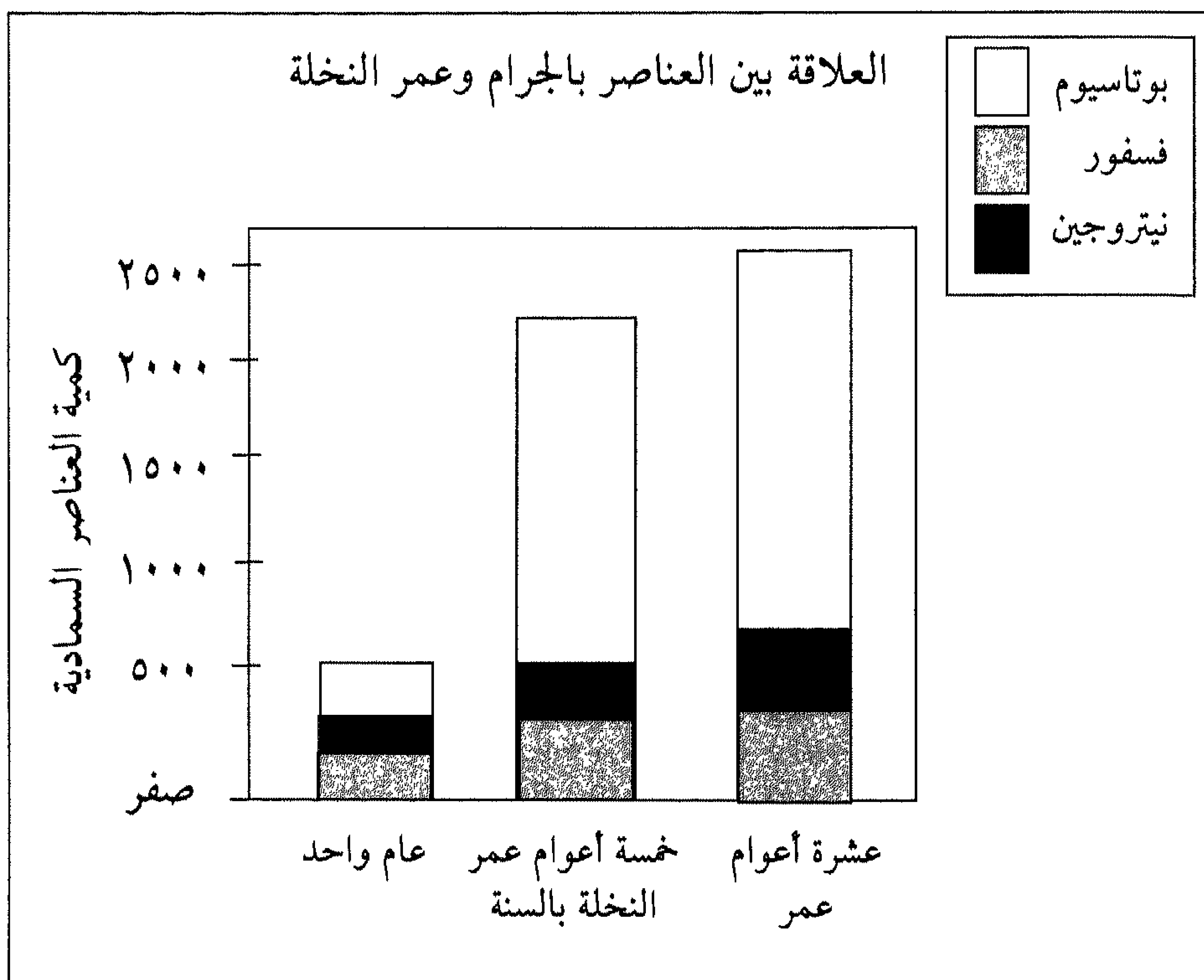
أجريت دراسة على ما تحتاجة النخلة من عناصر سمادية في برنامج للتسميد الكيماوي وكانت النتائج كالآتي:

عمر النخلة بالسنة	الكمية من العناصر المادية بالجرام		
	نيتروجين	فسفور	بوتاسيوم
عام واحد	١٤٥	١١٥	٢٥٠
خمسة أعوام	٣١٥	٢٥٠	١٣٧٠
١٠ أعوام	٤٢٥	٣٠٠	١٣٧٠

مثل هذه البيانات باستخدام الأعمدة المجزئة.

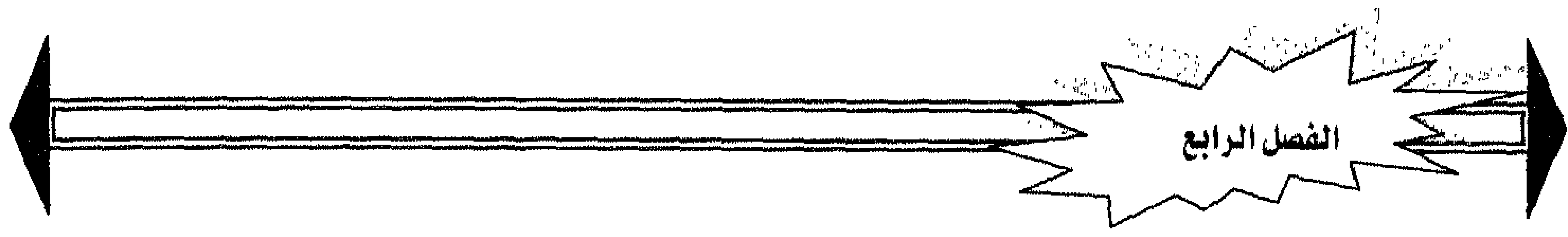


الحل:



٢) الرسوم البيانية ذات البعدين **Two – Dimensional Diagrams**:

هي طرق بيانية تستخدم عندما يكون هناك عاملان أو ظاهرتان يراد المقارنة بينهم في هذه الحالة يتم استخدام المستطيلات والمربعات والدوائر لتمثيل مثل هذه الظواهر ويعتمد مثل هذا التمثيل على مساحة الشكل في المستطيلات يتم تمثيل أحد الظواهر بطول أو ارتفاع المستطيل أما الظاهرة الأخرى فتمثل



بعرضه ويتم عمل المقارنات بين مساحات المستطيلات المختلفة وفي حالة تناسب مساحة الشكل مع طول ضلعه فنلجأ إلى التمثيل بالمربعات المختلفة الأشكال.

٣) الرسومات الدائرية Circle diagrams

من المعروف أن انصاف أقطار الدوائر تتناسب مع مساحاتها وعندما تبدي البيانات المعطاة هذه الخاصية يكون من الأفضل استخدام الرسوم الدائرية لتمثيل تلك البيانات.

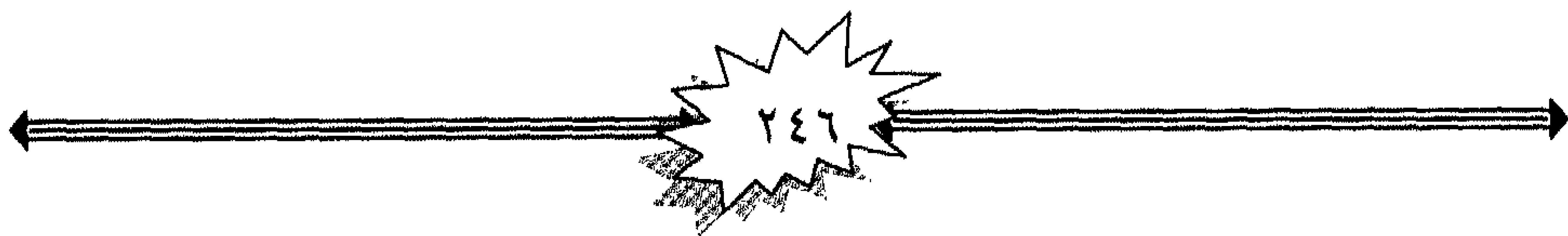
مثال (١٢):

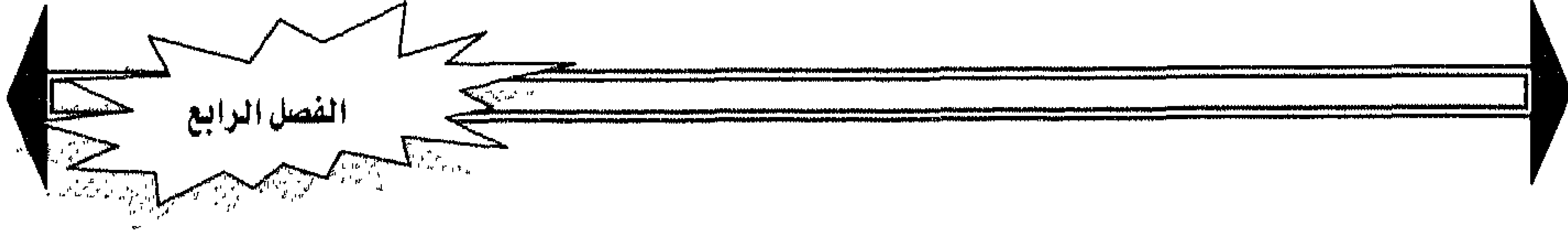
باستخدام الرسوم الدائرية مثل البيانات الآتية:

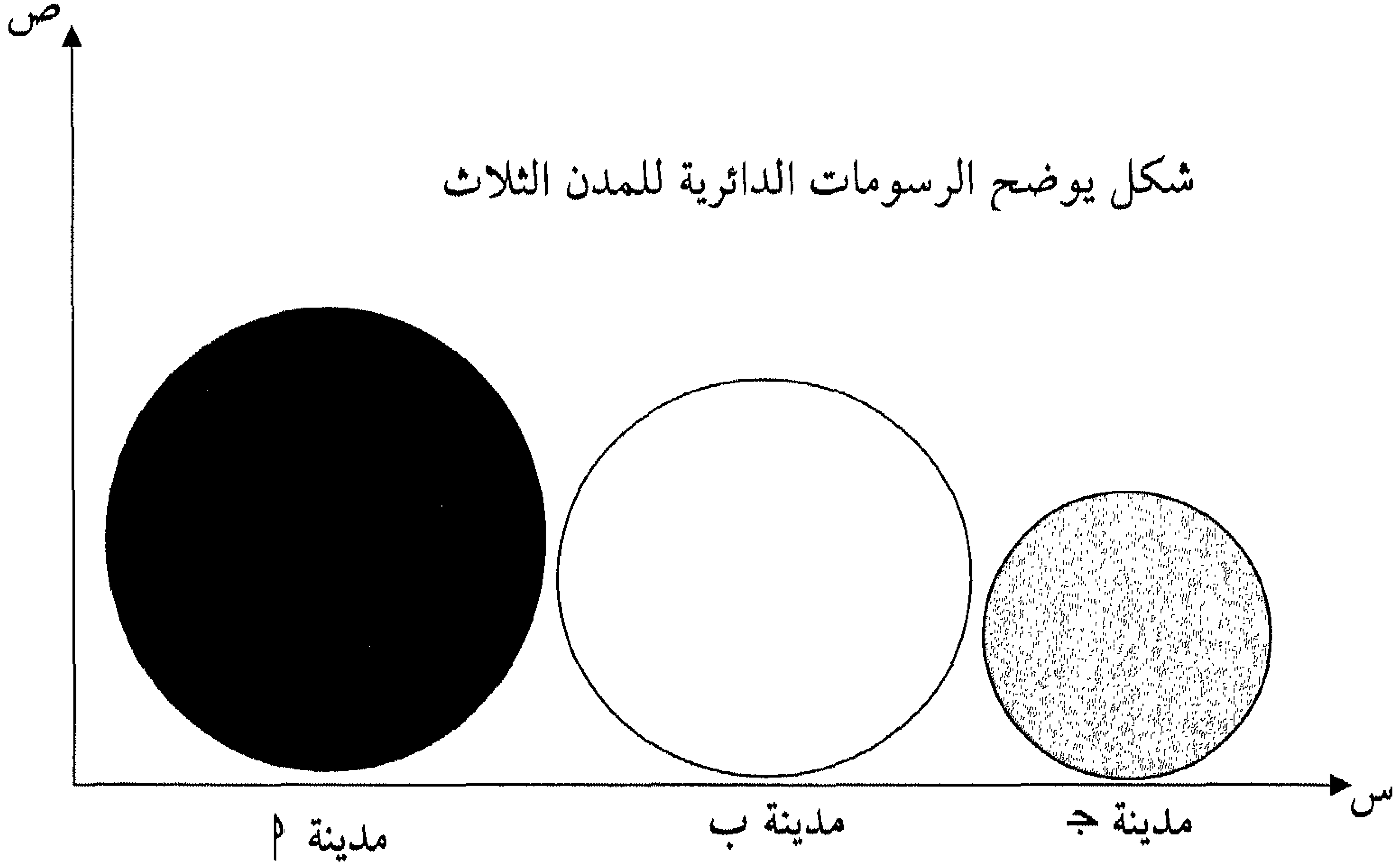
اسم المدينة	التعداد بالألف	الجذر التربيعي للتعداد
مدينة أ	١٠٠	١٠
مدينة ب	٨١	٩
مدينة جـ	٦٤,٥	٨,٠٣١

الحل:

نقوم برسم ثلاث دوائر تمثل مدينة من تلك المدن بحيث أن نصف قطر كل دائرة هو جذر تربيعي للتعداد المناظر لها.

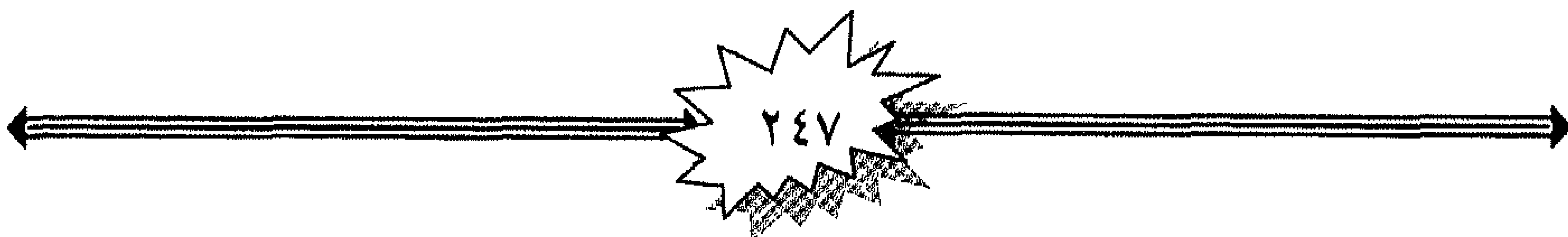


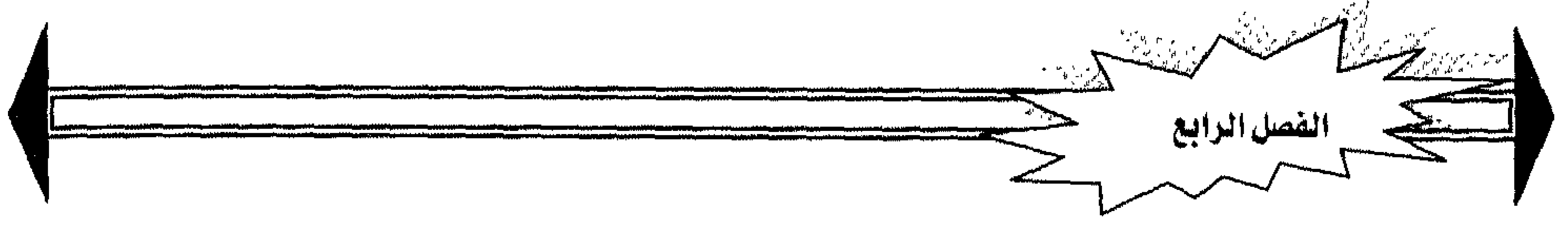




ب) القطاعات الدائرية: Die diagrams

في هذه الحالة يمكن تقسيم مساحة الدائرة الواحدة إلى قطاعات كل قطاع يمكن أن يمثل عامل من عوامل المراد تمثيلها بهذه الدائرة وحيث أنه من المعلوم لدينا أن مساحة أي قطاع دائري تتناسب مع الزاوية المركزية التي يحصرها هذا القطاع الدائري وبتقسيم ٣٦٠ على مجموع القراءات نحصل على ما تمثله كل قراءة من الدرجات وبالتالي يمكن تحديد عدد معين من الدرجات لتمثيل مجموعة معينة من القراءات وتمثل هذهالمجموعة بقطاع بحصر زاوية مساوية لما تمثله مجموع القراءات من درجات.





$$\text{الزاوية المركزية المناظرة لقراءة ما} = س_ي \times \frac{٣٦٠}{\sum_{ي=١}^{ن} س_ي}$$

حيث س ي هي القراءة المطلوب حساب الزاوية المركزية المناظرة لها والمجموع $\sum_{ي=١}^{ن} س_ي = س_١ + س_٢ + ... + س_ن$ هو مجموع كل من القراءات المعطاة.

مثال ١٣:

مثل البيانات الآتية باستخدام القطاعات الدائرية

النوع	أقراص صلبة سعة ٤٠ جيغا بايت	أقراص صلبة سعة ٨٠ جيغا بايت	أقراص ضوئية	أقراص مرنة سعة ١,٤٤ ميغا بايت
الكمية بالألف	١٥,٥	٢٠,٤	٣٠,٨	٣٨,٣

الحل:

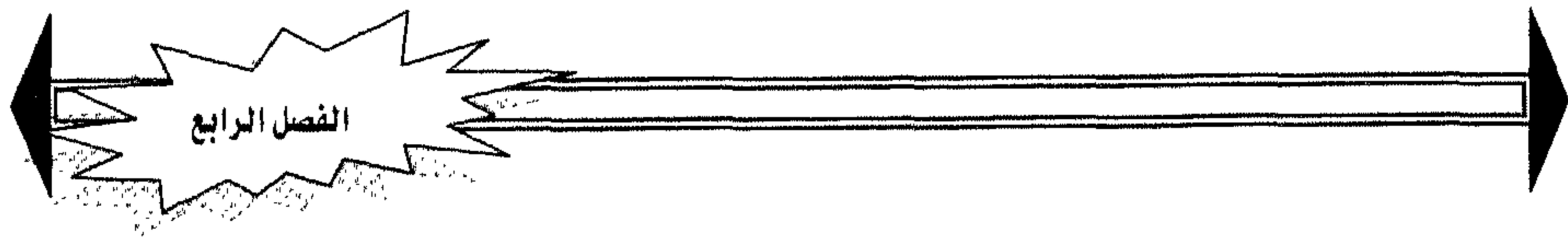
إيجاد مجموعة البيانات الموجودة في الجداول أعلاه ١٠٥ وبحساب قيمة الزاوية المناظرة لكل قيمة وذلك بقسمة ٣٦٠ على ١٠٥ فنجدها ٢,٤٣ وبالتالي:

الزواية المركزية المناظرة للاقراص سعة ٨٠ جيغا بايت = $١,٥ \times \frac{٣٦٠}{١٠٥} \cong ٥٤^\circ$

الزاوية المركزية المناظرة لأقراص سعة ٨٠ جيغا بايت= $٢٠,٤ \times \frac{٣٦٠}{١٠٥} \simeq ٧٠^\circ$

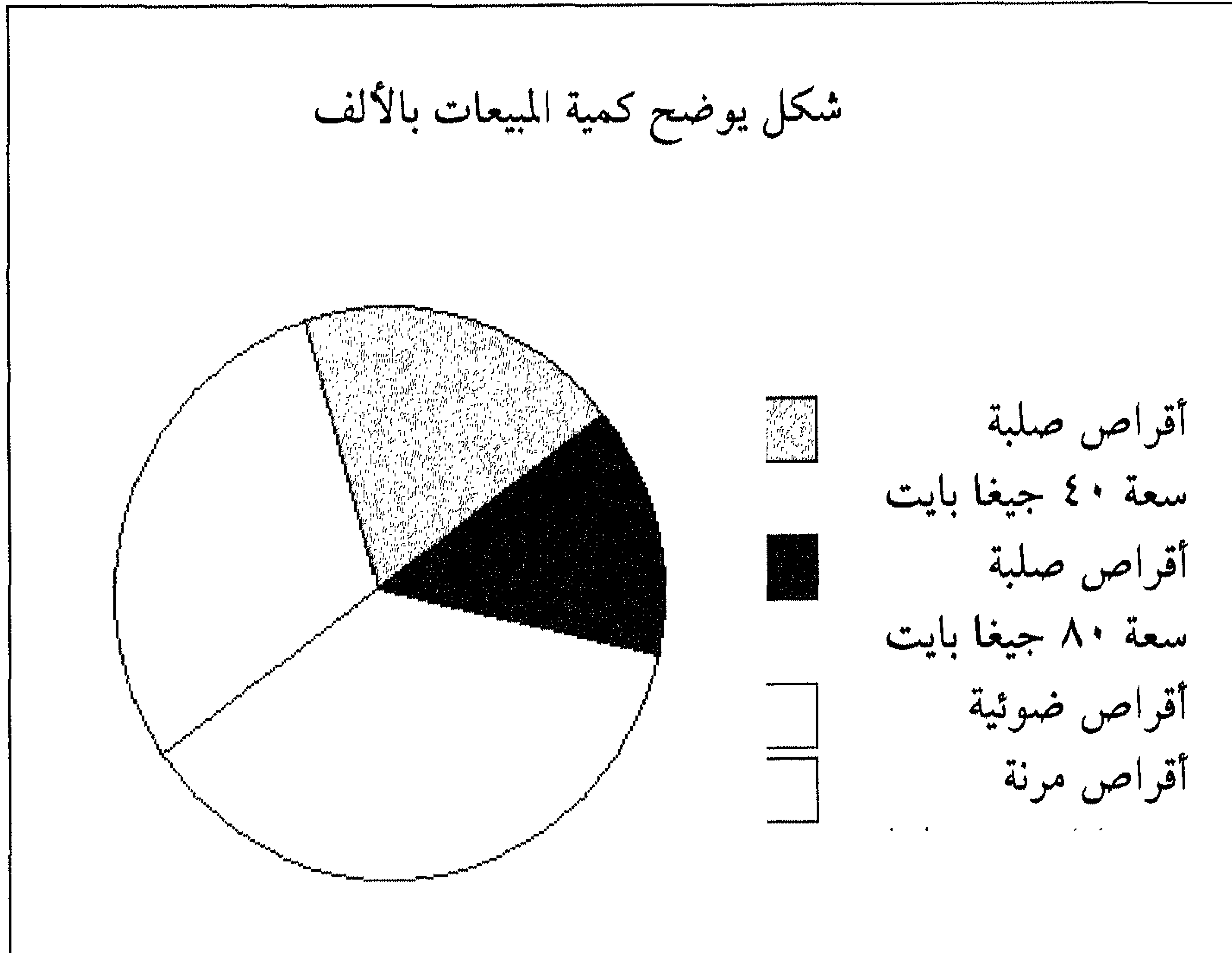
الزاوية المركزية المناظرة للأقراص الضوئية = $٣٠,٨ \times \frac{٣٦٠}{١٠٥} = ١٠٥^\circ$





الزاوية المركزية المناظرة للأقراص المرنة = ٣٨,٣ × $\frac{٣٦٠}{١٠٥}$ = ١٣١°

وبرسم دائرة ذات نصف قطر مناسب وبرسم هذه القطاعات الدائرية فنجد:

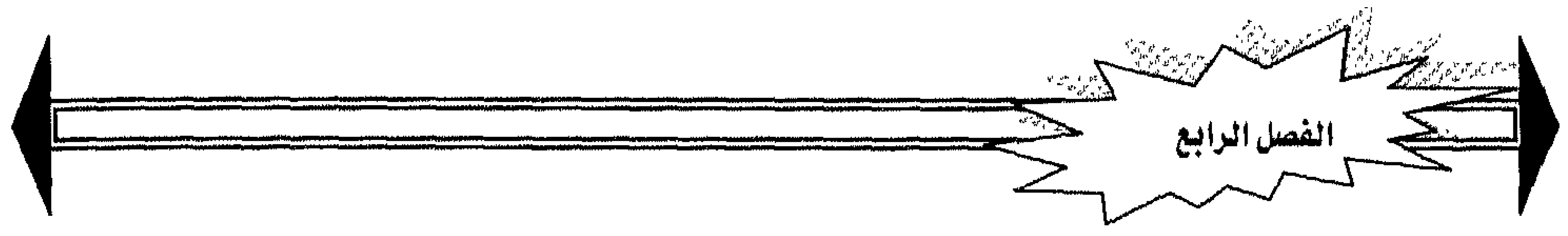


٣) الرسومات ذات ثلاثة أبعاد **Three dimensional diagrams**:

وفيما يتم تمثيل البيانات بحجم مكعب أو كرة أو هرم أو أسطوانة إلى آخره

٤) الصورة والخرائط **Maps and pictures**:

وفيها يتم استخدام الصور والخرائط لتوضيح ظاهرة ما كمثال توزيع كميات الأمطار في جميع أنحاء المملكة أوالتوزيع السكاني أو توزيع حقول النفط وغيرها.



*** *التمثيل البياني لتوزيع تكراري:* *The Graph of Frequency distribution***

إذا كان لدينا توزيع تكراري سواء ذي مجموعات أو بيانات مفردة وأردنا تمثيل هذا التوزيع بيانياً بأخذ إحداثيات مثل س، ص وبمقياس رسم معين يمكن تمثيل هذا التوزيع التكراري وفي الغالب يكون الهدف من هذا التمثيل هو مقارنة البيانات المعطاة في فترة زمنية أو مكانية معينة، وبالتالي يجب توخي الدقة عند اختيار مقايس الرسم والمحاور التي ينتسب إليها التمثيل البياني ومن أنواع التمثيل البياني ما يلي:

١) المدرج التكراري:

بتكوين المدرج التكراري من مجموعة من المستطيلات المتلاحقة قاعدتها هي الفترات التي تمثيل المجموعات المعطاة على محور (س) أي أن القاعدة لهذه المستطيلات أو الأعمدة عبارة من فترة ما على محور (س) تمثل عرض المجموعة المراد تمثيلها محسوباً من الحدود الفعلية لهذه المجموعة أما ارتفاع هذه الأعمدة فهو يمثل التكرار المناظر لهذه المجموعة وجاءت تسمية الشكل بالمدرج لأن الأعمدة الملاصقة تشبه المدرج.

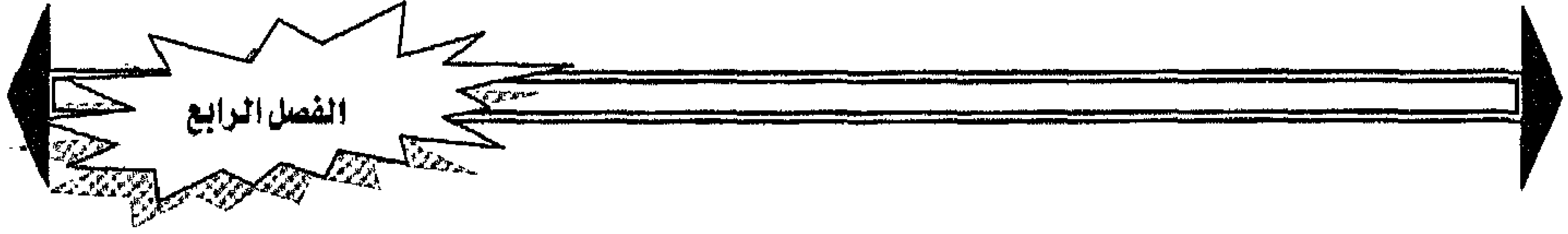
مثال (١٤) مثل البيانات الآتية باستخدام المدرج التكراري:

المجموعات	٢٠ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٩	٦٠ ـ ٦٩
التكرار	١٠	١٢	١٥	١٣	١٠

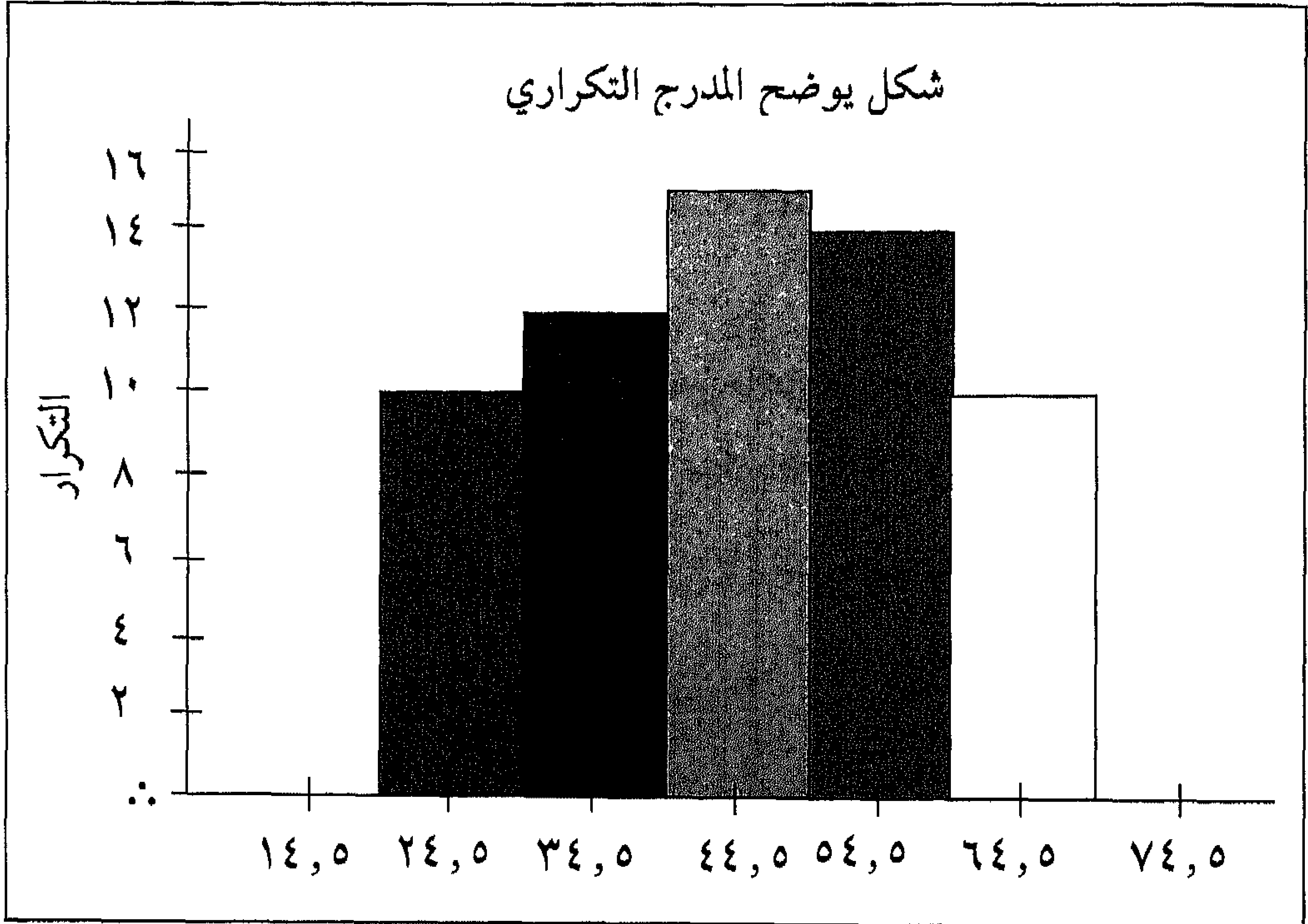
الحل:

برسم مجموعة احداثيات س، ص محور س يمثل المجموعات ومحور ص يمثل التكرارات ثم نقوم برسم عمود لكل مجموعة طول قاعدته هو طول





المجموعة بدءاً من الحد الأدنى الفعلي وانتهاء بالحد العلوي الفعلي للمجموعة والشكل الآتي يوضح ذلك:

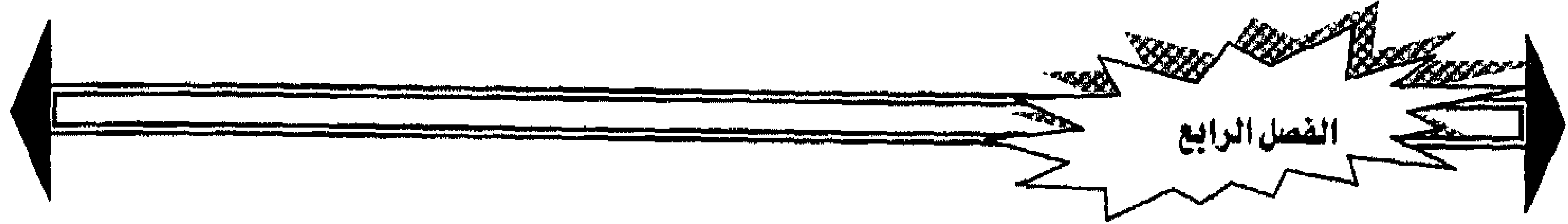


ويمكن رسم المدرج السابق بطريقة أخرى وهي عن طريق تعيين مراكز كل مجموعةورسم ارتفاع المستطيل المطلوب عند هذا المركز قيمته مساوية لقيمة تكرار المجموعة.

*** *مميزات المدرج التكراري:***

أ- يعطي المدرج التكراري صورة دقيقة عن الأحجام النسبية لمجموع التكرارات من مجموعة لأخرى.





ب- المساحة الكلية المحصورة تحت المدرج التكراري تساوي مجموع التكرارات في طول المجموعة.

جـ- يعطي صورة كاملة عن التوزيع التكراري

* عيوب المدرج التكراري

أ) يمكن تمثيل مجموعة من البيانات بأكثر من مدرج تكراري مختلف وذلك بتغير طول المجموعة

ب) لا يوضح التوزيع المتصل لقيم المتغير داخل فترة معينة بل أحياناً يعطي استنتاج بأن قيم هذا المتغير تقع عن مركز المجموعة.

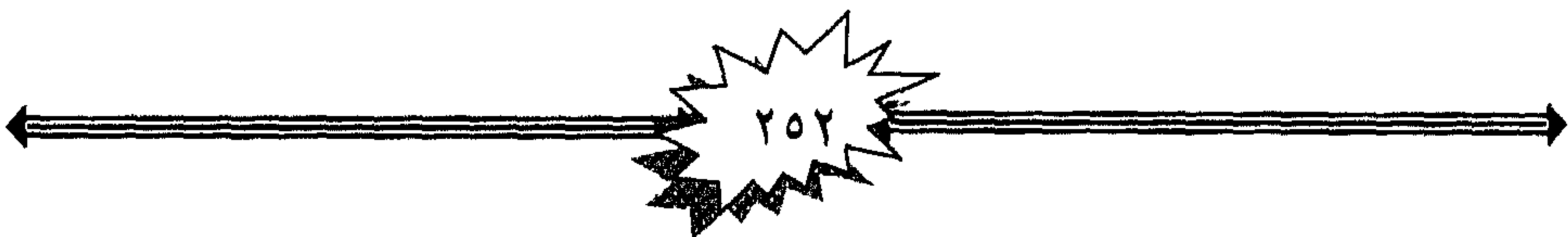
جـ) لا يمكن المقارنة بين توزيعين بالرجوع إلى المدرج التكراري لها.

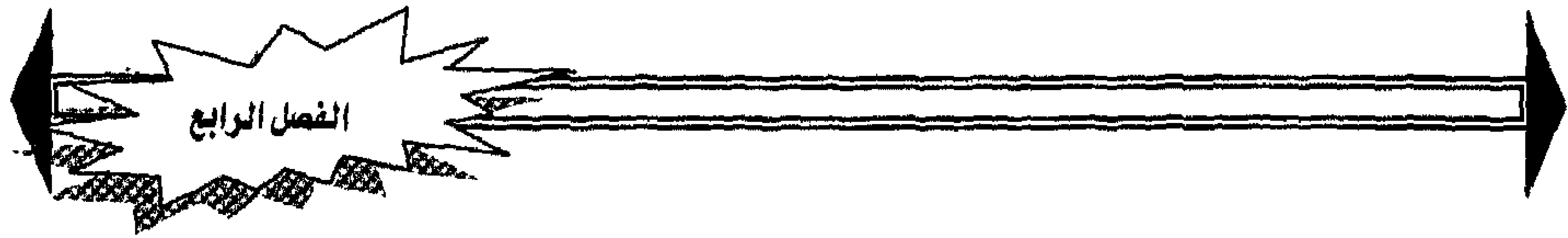
٢) المضلع التكراري: Frequency Polygon

برسم مجموعة من النقاط (س ، ص) حيث س يمثل مركز المجموعة وص يمثل التكرار المناظر لهذه المجموعة وبتوصيل هذه النقاط بخطوط مستقيمة نحصل على المضلع التكراري المطلوب ويتم غلق المضلع وذلك بتوصيل نقاطه الأولى والأخيرة بمركز المجموعات السابق للمجموعة الأولى واللاحق للمجموعة الأخيرة على محور س. ويمكن رسم المضلع التكراري بتنصيف رؤس الأعمدة نحصل على المضلع التكراري ثم نقوم بتوصيل أطرافه بمحور س كما سبق.

مثال ١٥:

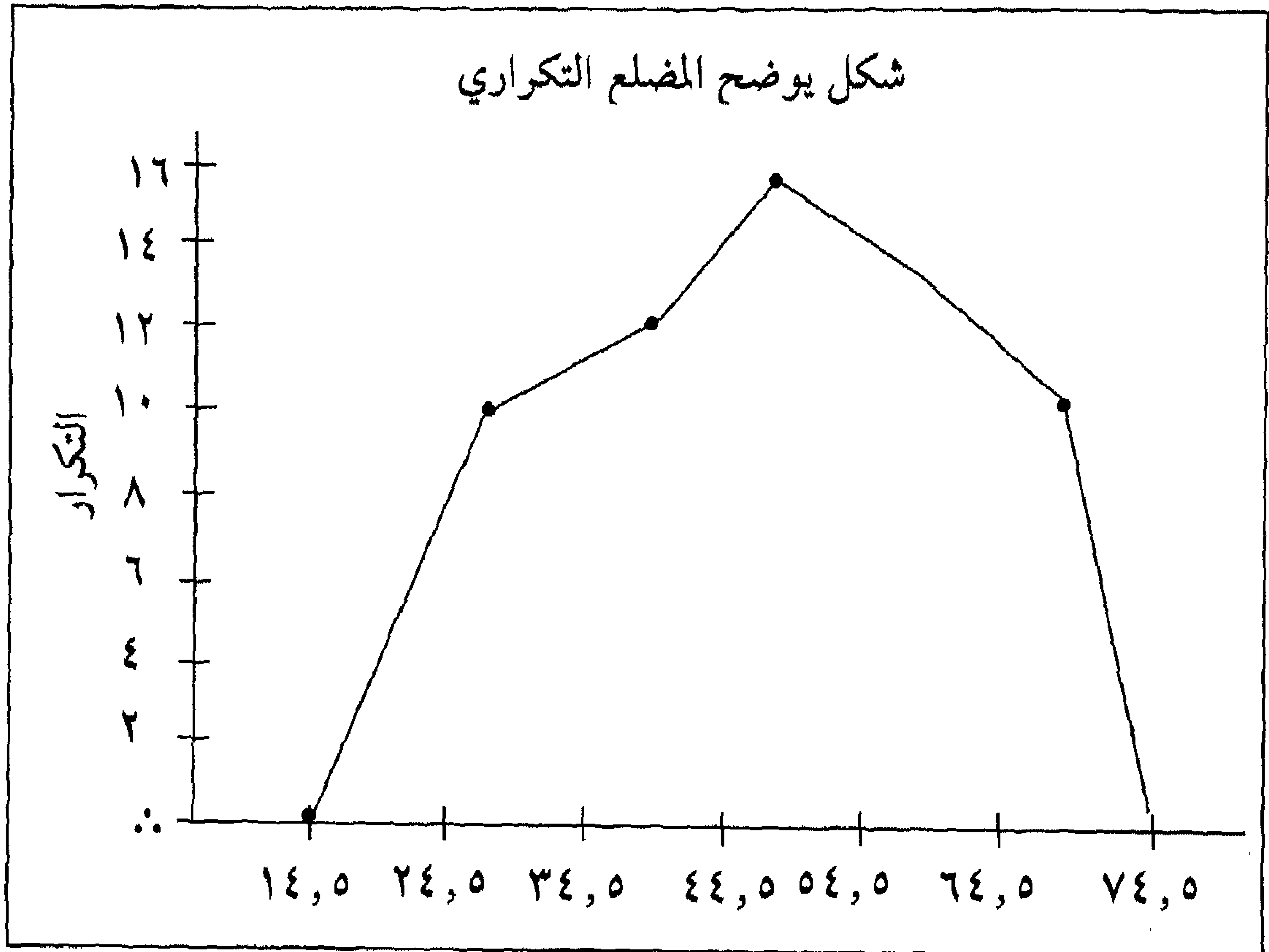
أرسم المضلع التكراري للبيانات المذكورة بالمثال السابق.





الحل:

بتقسيم رؤس الأعمدة في المدرج التكرارية السابق وتوصيل هذه المنتصفات بخطوط مستقيمة نحصل على الشكل الآتي:



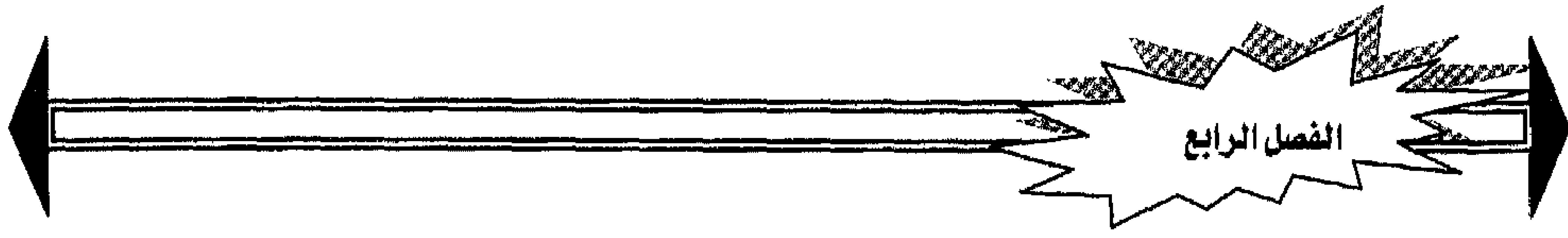
٣) المنحنى التكراري:

ونحصل عليه بتوصيل النقاط في حالة المضلع التكراري السابق لكن هذه المرة باليد لجعل المنحنى أملس قدر الإمكان.

مثال(١٦):

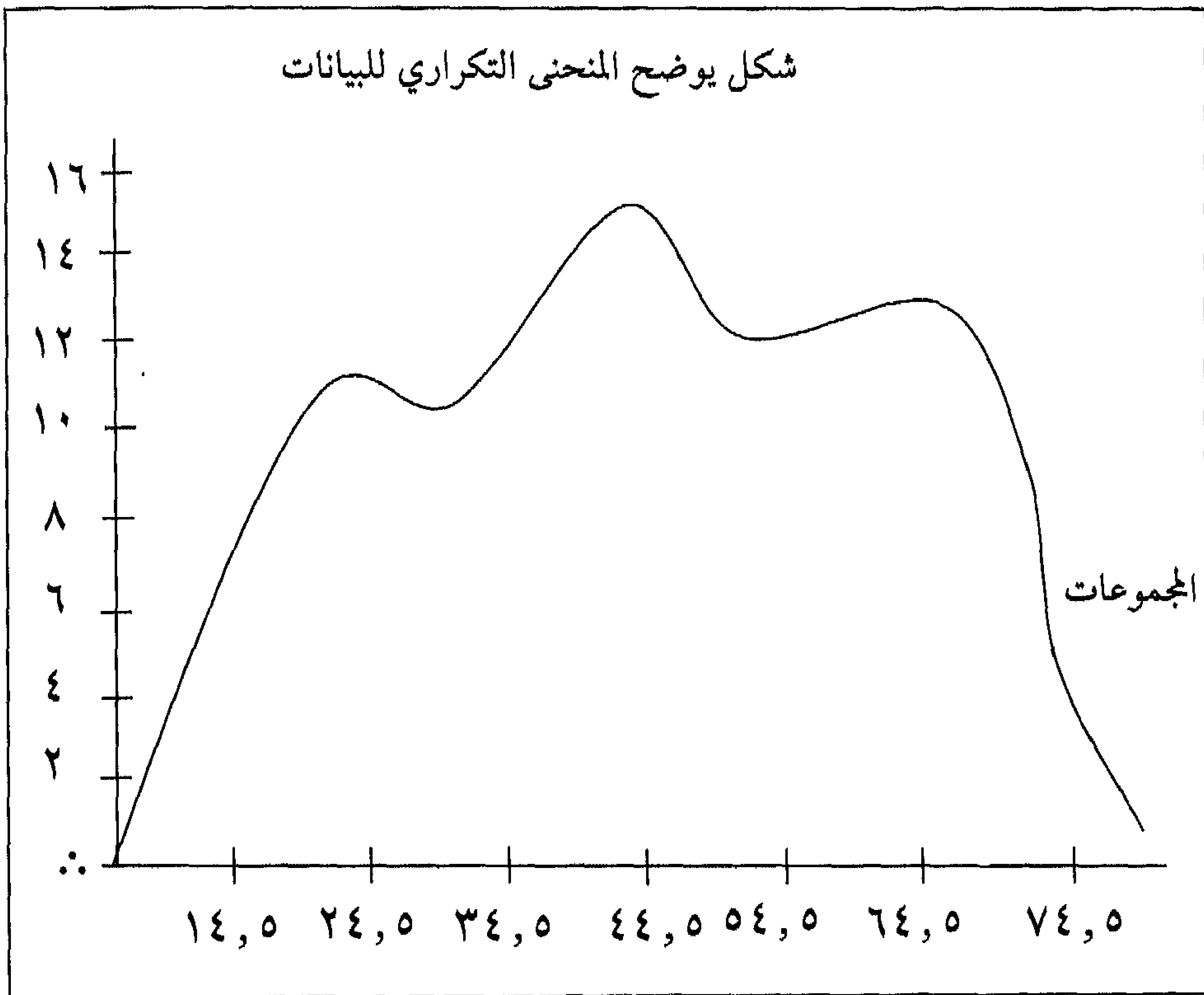
مثل هذه البيانات المذكورة في المثال(١٤)



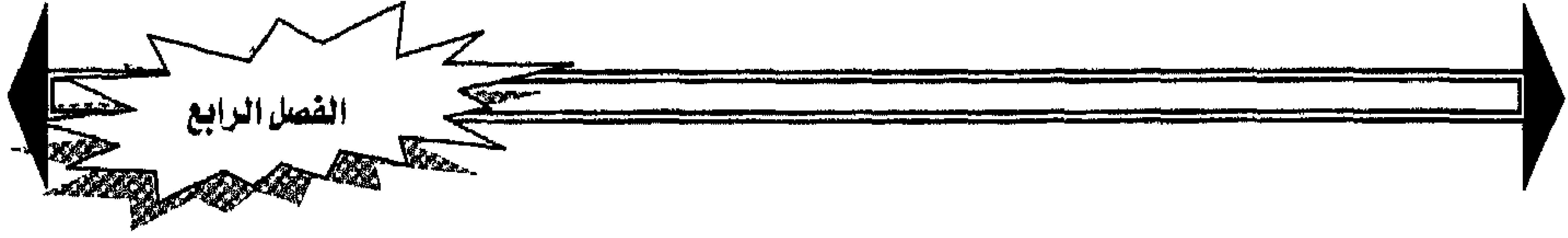


الحل:

برسم مجموعة النقاط التي تمثل مراكز المجموعات المعطاة وتكرارتها المناظرة والتوصيل بين هذه النقاط باليد للحصول على منحنى أملس فنحصل على الشكل الآتي:







تمارين

ملحوظة:

يفضل لطلاب الحساب الآلي استخدام البرامج الجاهزة مثل إكسل (Excel) لحل هذه التمارين.

١) إذا كان التعداد السكاني بالألف لخمسة مدن هو كالآتي:

مدينة ١	مدينة ٢	مدينة ٣	مدينة ٤	مدينة ٥
٥٠	٧٠	٢٠٠	١٥٠	١٣٠

مثل هذه البيانات:

أ- بالأعمدة البيانية البسيطة.

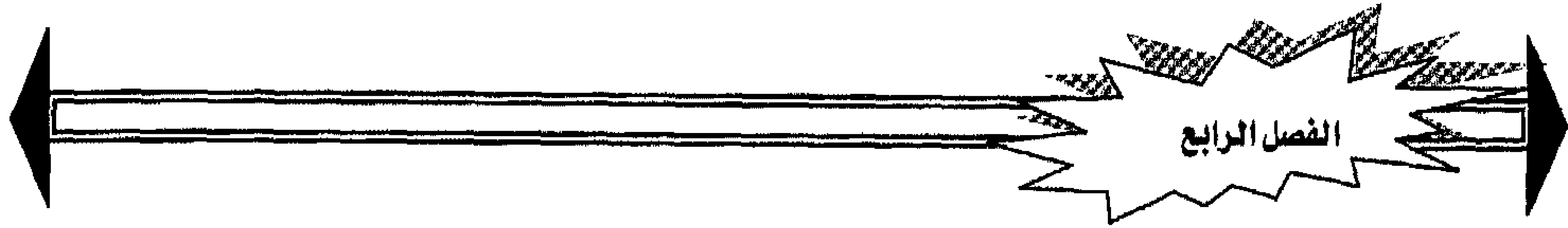
ب- بالرسوم الدائرية.

جـ - بالقطاعات الدائرية.

٢) باستخدام الأعمدة المتعددة مثل البيانات الآتية لأحد مصانع الأثاث كان إنتاجة كما يلي:

النوع	موديل ١	موديل ٢	موديل ١
كراسي	٦٥	٤٠	٤٥
طاولات	٣٤	٦٩	٥١
سراير	٥٠	٤٠	٤٤





٣) الجدول الآتي يمثل الإنتاج الصناعي للتمور ومشتقاتها حسب المناطق في المملكة لعام ٢٠٠١م.

الانتاج الصناعي للتمور في الطن

المنطقة	تمور معبئة	عجينة التمور	مربيات من ملاد	دبس	خل	كحول	اعلاف		
الشرقية	٢٢٦٤٢	١٠٣٠	∴	١٣١	٦٧	∴	٩٩	١٢٩٦	٢٥٢٩٥
الرياض	٢٩٥٠	٨٠٠	∴	∴	∴	∴	٥٠	١٥٨٣	٥٣٨٣
القصيم	٢١٠٠	٨٠٠	∴	∴	∴	∴	٢٥	٣٩٠	٣٣١٥
المدينة المنورة	٦٦٨٩	١٠٩٨	∴	∴	∴	∴	٢٧٢	١٥٢٥	٩٥٨٤
حائل	٢٨	٤	∴	∴	∴	∴	∴	٣	٣٥
مكة المكرمة	٦٦٨	١٠٩٨	∴	∴	∴	∴	∴	٣٦	٣٨٥
عسير	٢٠٧	∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴	٢٠٧

باستخدام القطاعات الدائرية مثل هذه البيانات

٤) إذا كانت الأجور الأسبوعية ٢٥٠ عامل بالريال في أحد المصانع كالآتي:

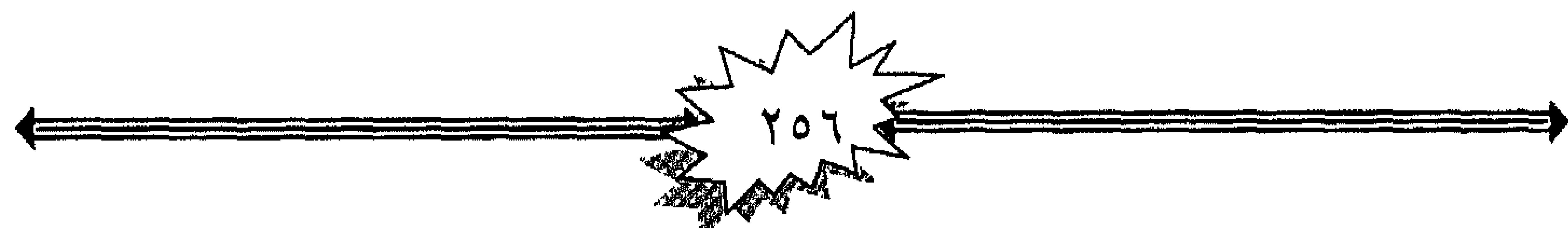
الأجر	٩٠ – ٩٤	٩٥ – ٩٩	١٠٠ – ١٠٤	١٠٥ – ١٠٩	١١٠ – ١١٤	١١٥ – ١١٩
عدد العمال	٦٥	٩٠	٤٠	٢٢	١٥	١٨

مثل هذه البيانات باستخدام ما يلي:

أ- المدرج التكراري

ب- المضلع التكراري

جـ - المنحنى التكراري



٥) كون جدول تكراري ذي مجموعات لأجور ٣٠ عامل بالريال في مصنع

٦) أوجد الداول التكرارية الصاعدة والنازلة للتوزيع التكراري الآتي:

الأجر	٦٠ – ٧٩	٨٠ – ٩٩	١٠٠ – ١١٩	١٢٠ – ١٣٩	١٤٠ – ١٦٩	١٧٠ – ١٩٩
عدد العمال	٥	١٤	١٧	١٠	١	٣

ثم ارسم هـذه المنحنيـات في مجموعـة واحـدة مـن الأحـداثيات، دون مـا تشاهدة!

٧) كون الجدول التكراري لأجور (٥٠) عامل بالريال والتي هي كالآتي:

٤٦	١٠٠	٥٠	٦٥	٧٣	٩٠	١٠٥	١٦٧	٧٣	٩٥	٨٧	٨٧	٨٩	٥٦
٨٧	٨٦	١٢١	١٠٠	١٨٠	١٠٠	٧٩	٦٤	١٦٦	٨٠	١٠٨	١٠٠	١١٠	
١٩	١١٠	٦٢	١٠٠	٠	٩٠	٨٤	٥٥	١٠١	٦١	٩٧	٧٠	٧٨	٩٥
٧٠	١٠٢	١١٦	٨٤	٦٧	٨٠	١٠٠	٧٨	٧٦	٦٥				

أ- أوجد الحدود الفعلية للمجموعات ومراكزها.

ب- أوجد التكرار المتجمع الصاعد والنازل مثليها.

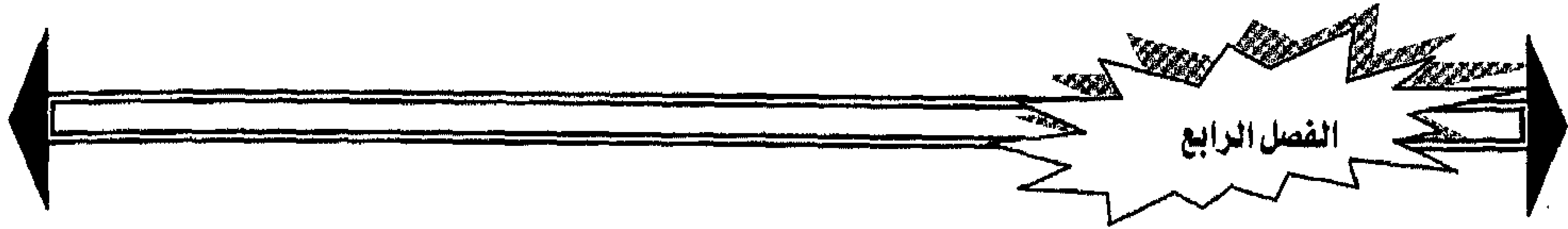
جـ- ما هو طول كل مجموعة

٨) ما هي أهمية الاحصاء؟ وما هو الفرق بين الاحصاء الوصفي والاحـصاء الاستدلالي؟

٩) ما هي طرق جمع البيانات الثانوية؟

١٠) ما هي أسس تقسيم البيانات؟

١١) ضـع علامـة (✓) أمـام العبـارة الـصحيحة وإشـارة (×) أمـام العبـارة الخاطئة:



أ- يمكن تقسيم البيانات حسب الوصف والكم فقط.

ب- تقتصر كلمة مجتمع على الأشخاص فقط.

جـ - فرع الاحصاء الوصفي هو الفرع الذي يهدف إلى دراسة عينة ما بهدف الوصول إلى تعميم عن خواص المجتمع.

د - يمكن لأي متغير متصل بأن ياخذ قيماً قابلة للعد.

هـ- التوزيعات التكرارية هي طريقة لترتيب وتنظيم البيانات.

و- لا يوجد تمييز للتكرارات النسبية.

ز- يمكن أن يقل مجموع التكرارات النسبية عن الواحد الصحيح.

١٢) أكمل العبارات الآتية:

أ- يعرف المجتمع بأنه .... أما العينة فهي ....

ب- الأعمدة البسيطة هي .... أما المضلع التكراري فهو ....

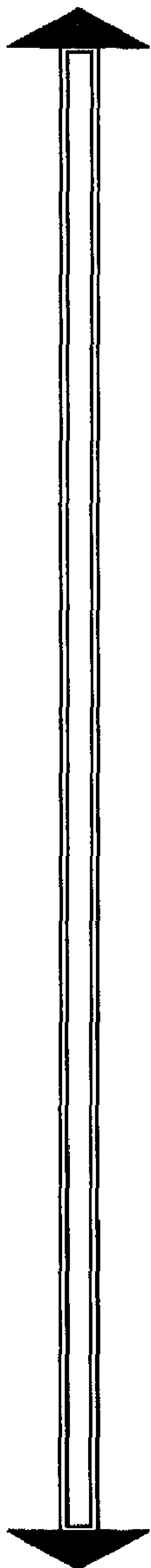
جـ - الفرق بين البيانات الأولية والثانوية هو ....

د- فرع الاحصاء الاستدلالي بهدف إلى ....

هـ- يمكن حساب التكرار النسبي لأي مجموعة بقسمة ..... على ....

و- تستخدم جداول التكرارات الثنائية لدراسة ....

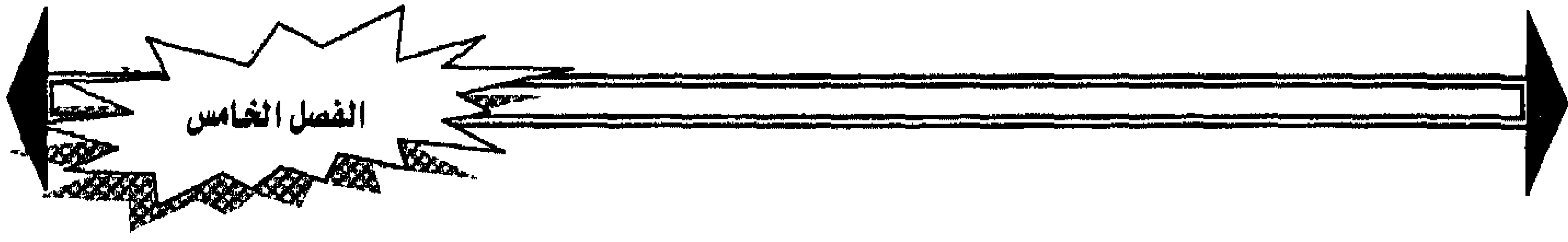






المجموعات والدوال

Sets and Functions



الفصل الخامس

المجموعات والدوال Sets and Functions

١-١ تعاريف وأمثلة

لقد درس الطالب في المراحل الأولى المجموعات وإجراء بعض العمليات عليها باعتبارها عامل مساعد لفهم الأفكار الرياضية علاوة على أهميتها في حد ذاتها نعطي في هذا الفصل دراسة سريعة للمجموعات وخصوصاً ما نحتاجه في الدروس القادمة للكتاب.

(١ – ١) تعاريف وأمثلة:

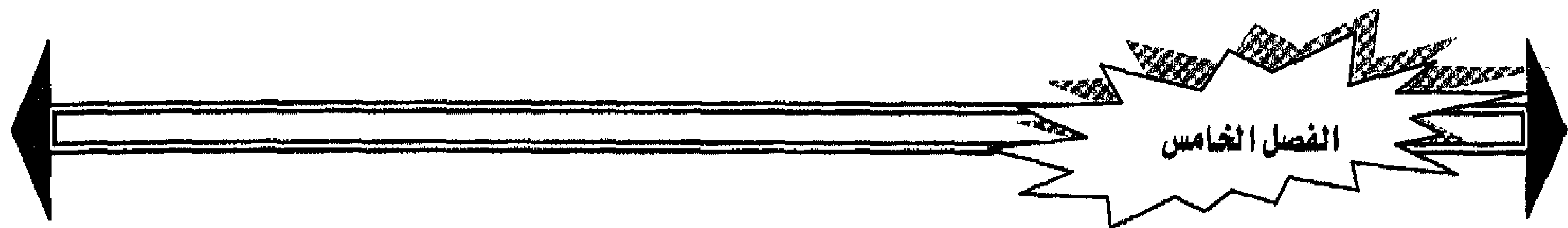
ما هي المجموعة ؟!

إن الإجابة عن هذا السؤال ليست بالأمر الهين الذي يمكن الإجابة عليه بأسلوب مقنع في مثل هذه العجالة التي نقدمها للقارئ هنا، ولكن نكتفي بالقول بأن المجموعة هي تجمع من الأشياء المتميزة والمعرفة تعريفاً جيداً.

لقد تم الاصطلاح على استخدام الحروف الكبيرة أ، ب، ج، للتعبير عن المجموعات واستخدام الحروف الصغيرة ٲ′، ب′، ج′ للتعبير عن الأشياء (العناصر) التي تكون المجموعة.

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين الآتيتين:





١) طريقة القائمة وهي كتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة أو كتابة بعضها على شرط أن يتم استنتاج بقيتها.

٢) طريقة الوصف وهي اعطاء خاصية أو خواص معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها يستخدم الرمز (∋) للدلالة على الانتماء فمثلاً إذا كانت ﺃ= { ١، ٢، ٣ } فإن ٢ ∋ ﺃ (يقرأ ٢ تنتمي إلى ﺃ) ويستخدم الرمز (∌) للدلالة على عدم الانتماء فمثلاً ٤ ∌ ﺃ في المثال السابق.

مثال (١):

إذا كانت ﺃ = {م، ٣، ٧، ١١} فإن ﺃ هي المجموعة المتكونة من العناصر ٢، ٣، ٧، ١١ وإذا كانت ب = {ﺃ′، ب′، ج′} فإن ب هي المجموعة المتكونة من العناصر ﺃ′، ب′، ج′وإذا كانت ن = {١، ٢، ٣ ...} فإن ن هي مجموعة الأعداد الطبيعية ويمكن كتابة المجموعة بعد أشكال فمثلاً:

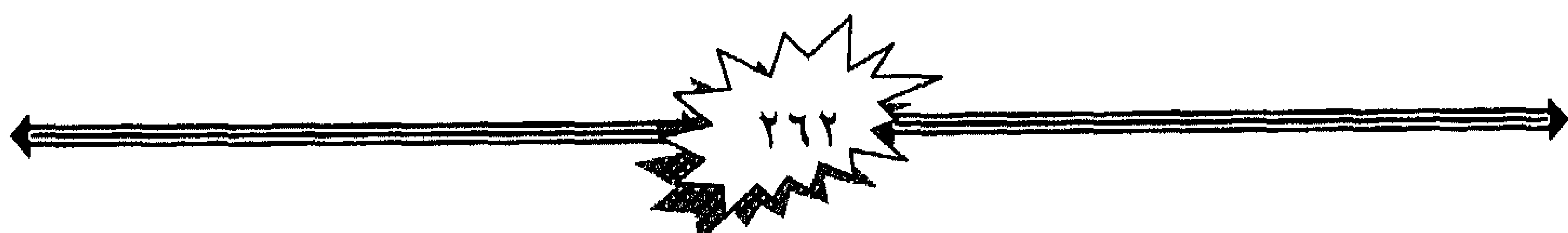
م = {س ∋ ن: ٣ ≥ س > ٧ }

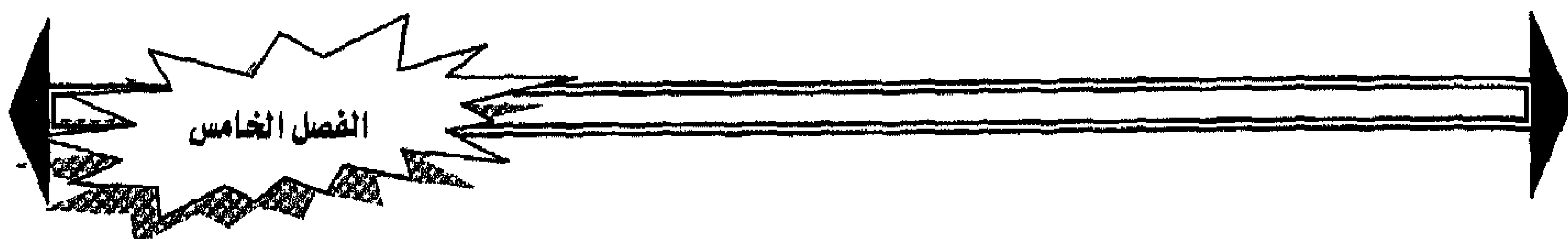
وهذه المجموعة هي نفسها: م = {٣، ٤، ٥، ٦}

❖ **تعريف (١-١-١) المجموعة الخالية**

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر.

ويستخدم الرمز ∅ (فاي) للتعبير عن المجموعة الخالية وقد يستخدم في بعض الأحيان بالرمز { } للدلالة على المجموعة الخالية.





مثال (٢):

إذا كانت ٲ مجموعة الأعداد الزوجية الواقعة بين صفر والواحد فإن ٲ = ∅

❖ **تعريف (١-١-٢) المجموعة المنتهية**

هي المجموعة الخالية أو المجموعة التي تحتوي على ن من العناصر حيث ن عدد صحيح موجب عدا ذلك تسمى مجموعة غير منتهية.

لاحظ أن ترتيب العناصر في المجموعة ليس بالأمر المهم وتكرار العناصر في المجموعة لا يزيد من عدد عناصرها فمثلاً المجموعة {١، ٢، ٣} هي نفسها المجموعة {١، ٢، ٣، ٢}.

تعريف (١-١-٣):

المجموعة ٲ تساوي المجموعة ب (يكتب ٲ = ب) إذا تكونتا من العناصر نفسها، أي إذا كانت اسمين لمجموعة واحدة.

مثال (٣):

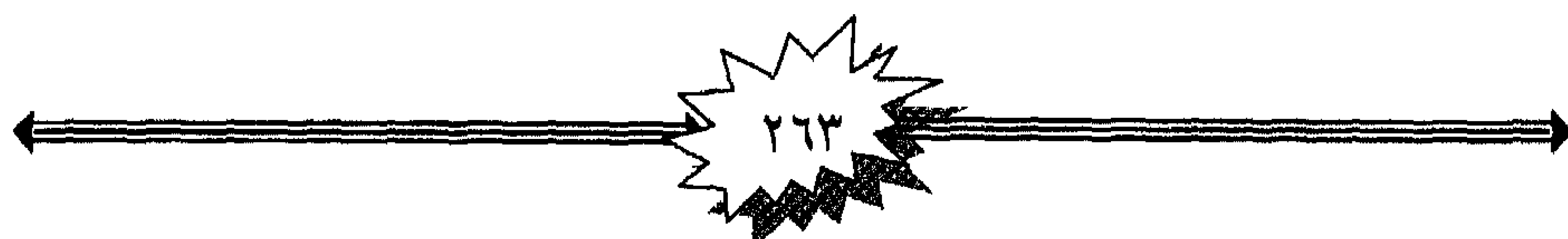
إذا كانت ٲ = {س ∋ ن: ٢ < س < ٦} وكانت ب = {٣، ٤، ٥} فإن ٲ = ب

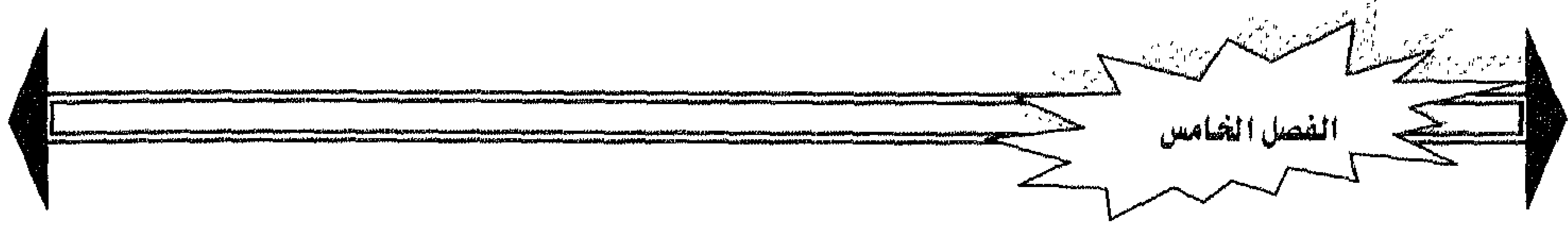
تعريف (١-١-٤):

المجموعة ٲ مجموعة جزئية من المجموعة ب وإذا كان كل عنصر في ٲ هو في ب يكتب ٲ ⊇ ب (ويقرأ ٲ مجموعة جزئية من ب)

مثال (٤):

إذا كانت ط مجموعة الأعداد الطبيعية وكانت ٲ = {٢، ٩، ١٠} فإن





أ ⊇ ن المجموعة أ مجموعة جزئية فعلية من ب، إذا كان هناك عنصر في ب لا ينتمي إلى أ تكتب أ ⊂ ب أو أ ⊊ ب

تسمى المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد بالمجموعة المفردة أي أن {س} بعد تعريف الاحتواء نستطيع اعطاء تعريف أخر لتساوي مجموعتين وهو:
أ = ب إذا وإذا كان أ ⊇ ب فقط أ ⊇ ب وكذلك ب ⊇ أ

ملاحظات هامة:

١- المجموعة الخالية مجموعةجزئية من أي مجموعة.

٢- كل مجموعة أ مجموعة جزئية من نفسها.

٣- قد تكون عناصر المجموعة مجموعات في حد ذاتها.

٤- المجموعة الخالية وحيدة.

مثال (٥):

إذا كانت أ = {{أ'، ب'}، {أ'، جـ'}، {أ'}}

فإن المجموعة أ تحتوي على ثلاث عناصر هي العنصر{أ'، ب'} والعنصر {أ'، جـ'} والعنصر {أ'}وكل عنصر من هذه العناصر هو مجموعة في حد ذاته.

(١-٢) عمليات على المجموعات:

لنفرض أن أ، ب مجموعتين

يمكن القيام بعمليات على المجموعتين أ، ب للحصول على مجموعات أخرى وهذه العمليات هي:

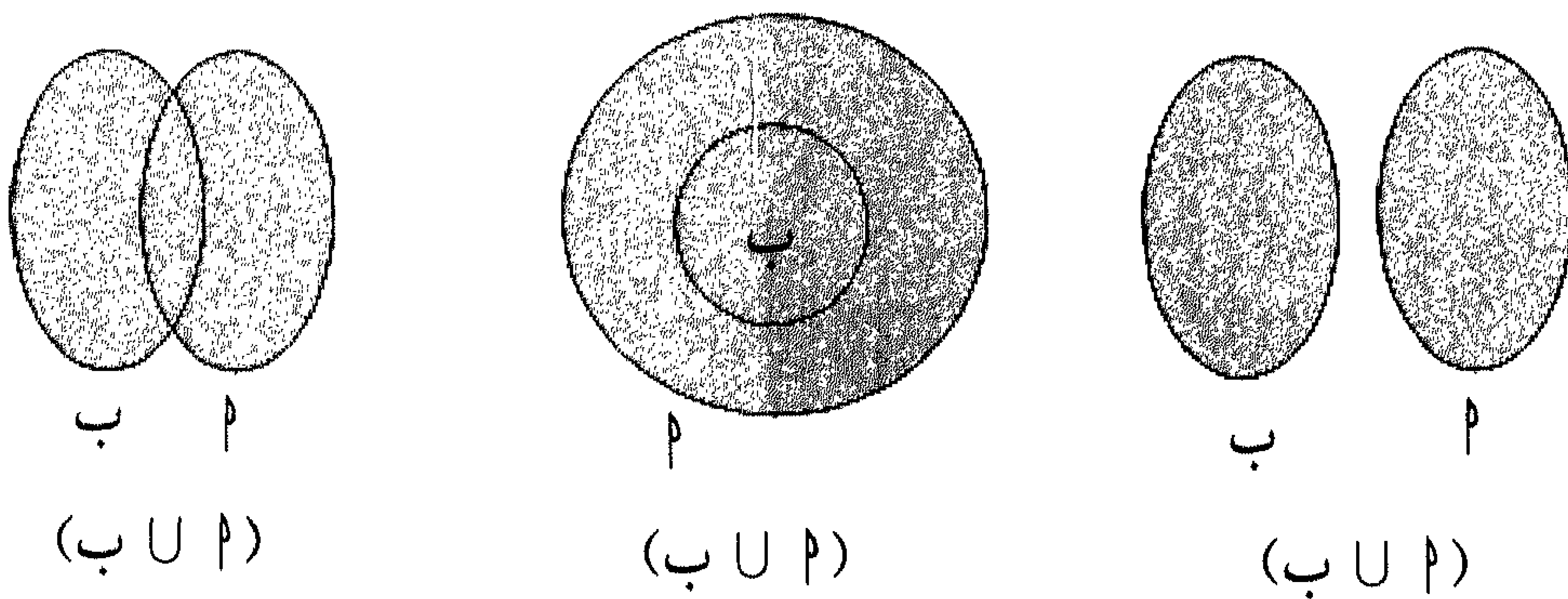


تعريف (١-٢-٢):

إذا كانت مجموعتين أ، ب فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى أ أو تنتمي إلى ب أو تنتمي إلى كلاهما تسمى إتحاد المجموعتين أ، ب ويرمز لذلك بالرمز أ ∪ ب أي أن:

أ ∪ ب = {س: س ∈ أ أو س ∈ ب}

يمكن توضيح ذلك بأشكال فن كما يلي:

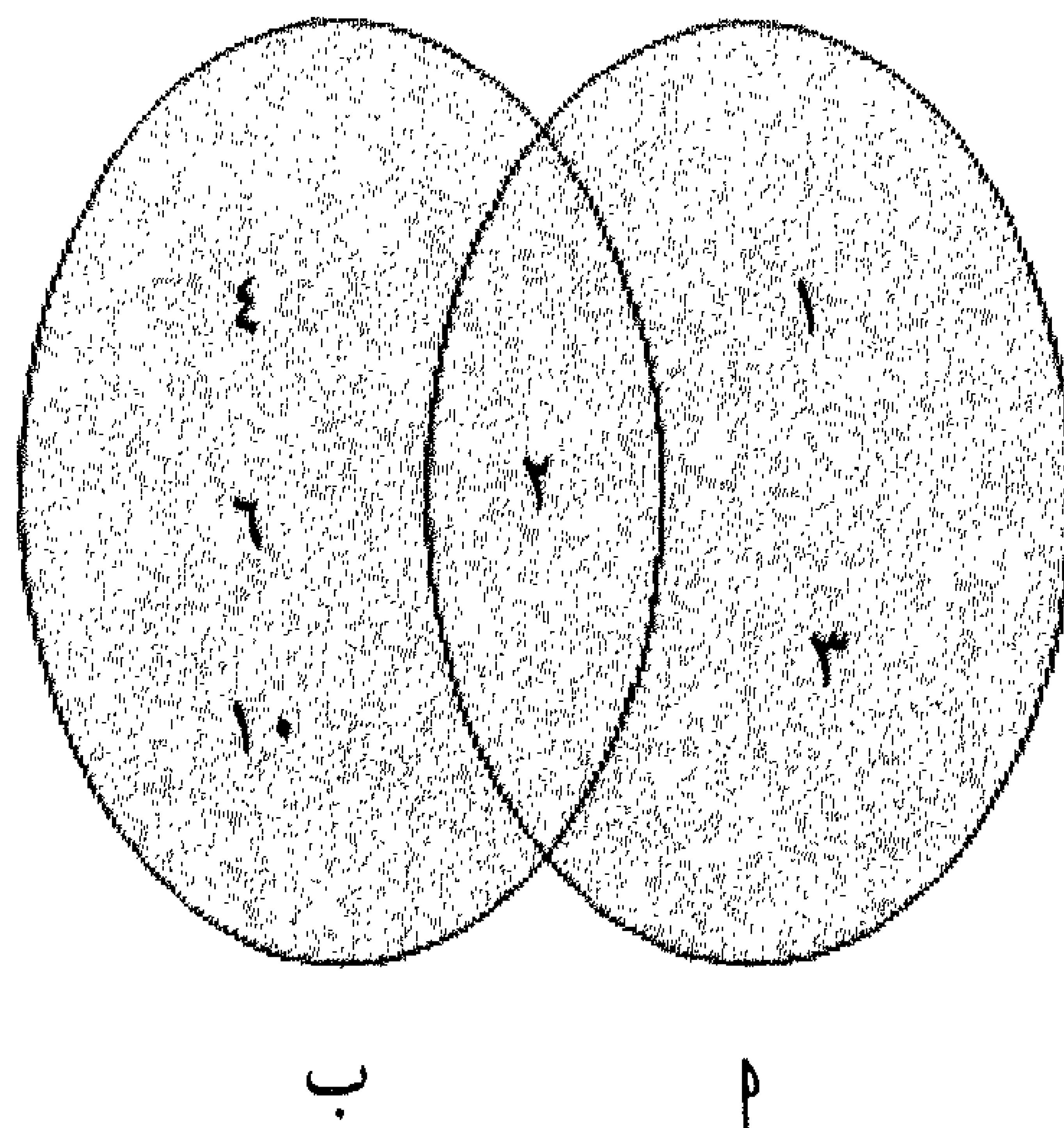


الجز المضلل هو الاتحاد

مثال (٦):

إذا كانت = {١، ٢، ٣} و ب = {٢، ٤، ٦، ١٠} فإن:

أ ∪ ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٠}.



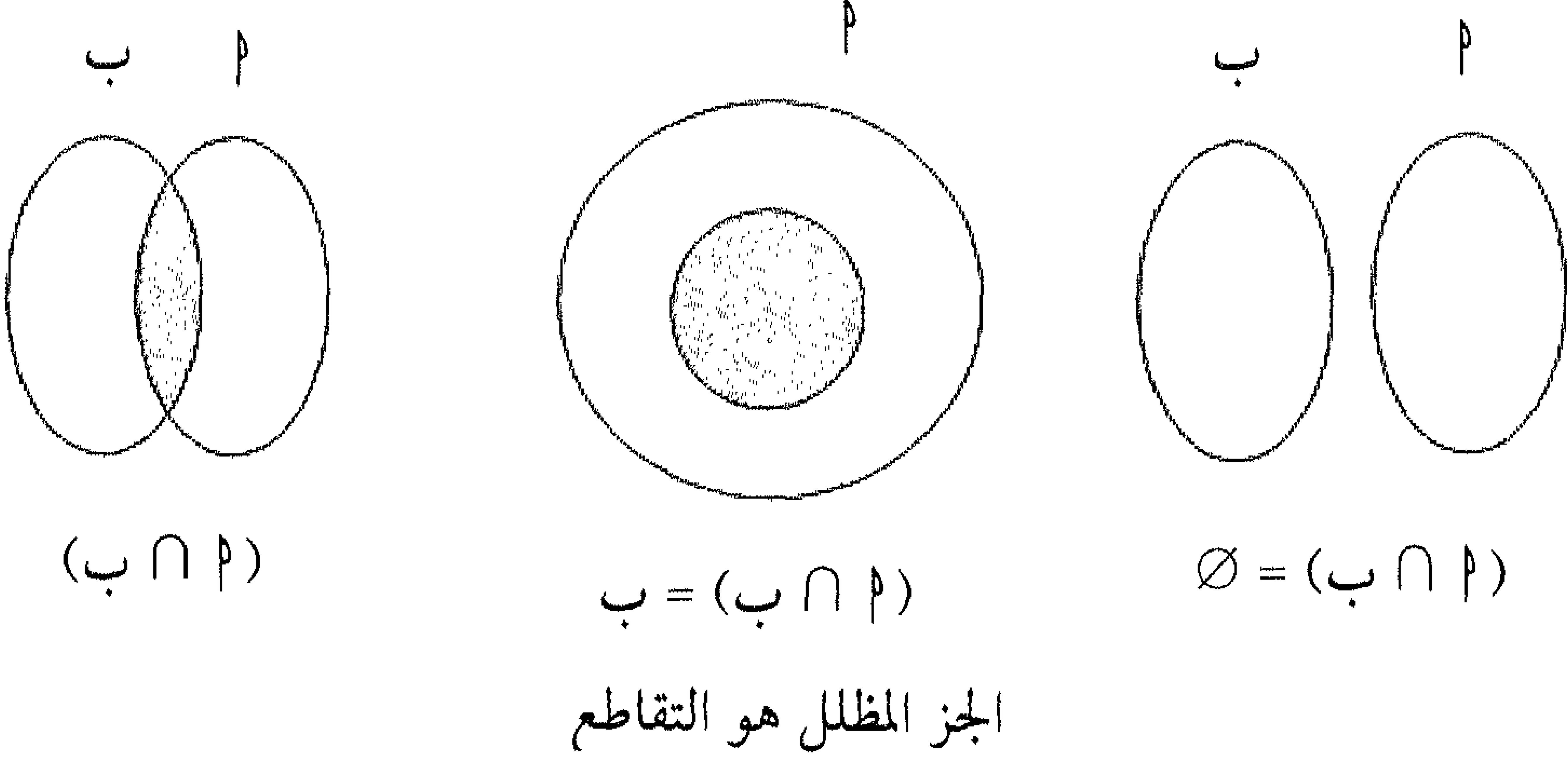
من تعريف الاتحاد نلاحظ أن:

أ) أ ⊆ أ ∪ ب　　　ب) أ ∪ ب　　　ج) أ ∪ ∅ = أ

تعريف (١-٢-٢):

إذا كانت أ، ب مجموعتين فإن المجموعةالتي تتكون من العناصر المشتركة بينهما تسمى تقاطع المجموعتين أ، ب ويرمز لذلك بالرمز أ ∩ ب أي أن: أ ∩ ب = {س: س∈ أ و س∈ ب}

يمكن توضيح ذلك بأشكال فن كما يلي:

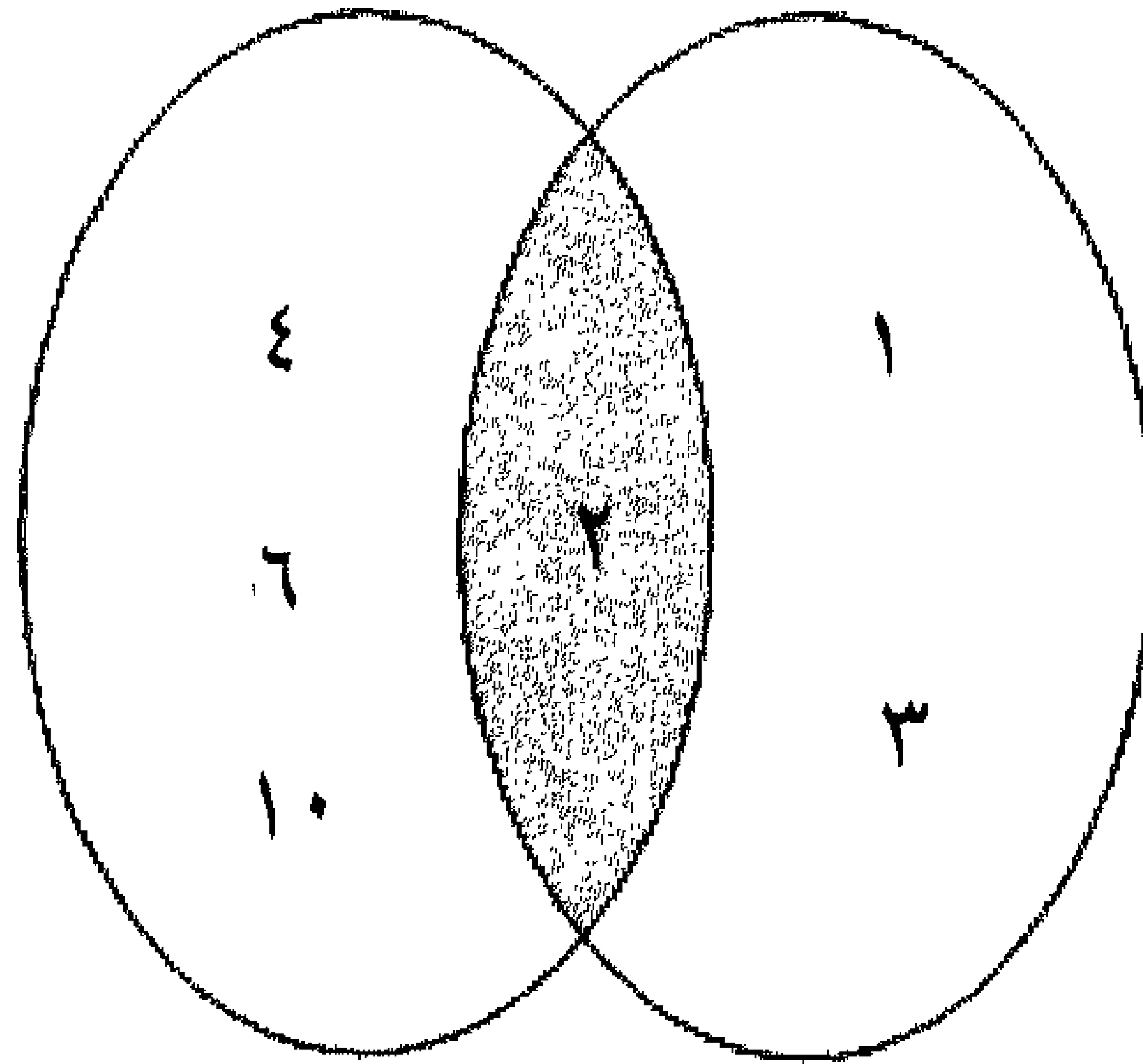


الجز المظلل هو التقاطع

مثال (٧):

إذا كانت، ب كما في المثال (٦) فإن:

م ∩ ب =



من تعريف التقاطع نلاحظ أن:

أ) أ ∩ ب ⊆ أ

ب) أ ∩ ب ⊆ ب

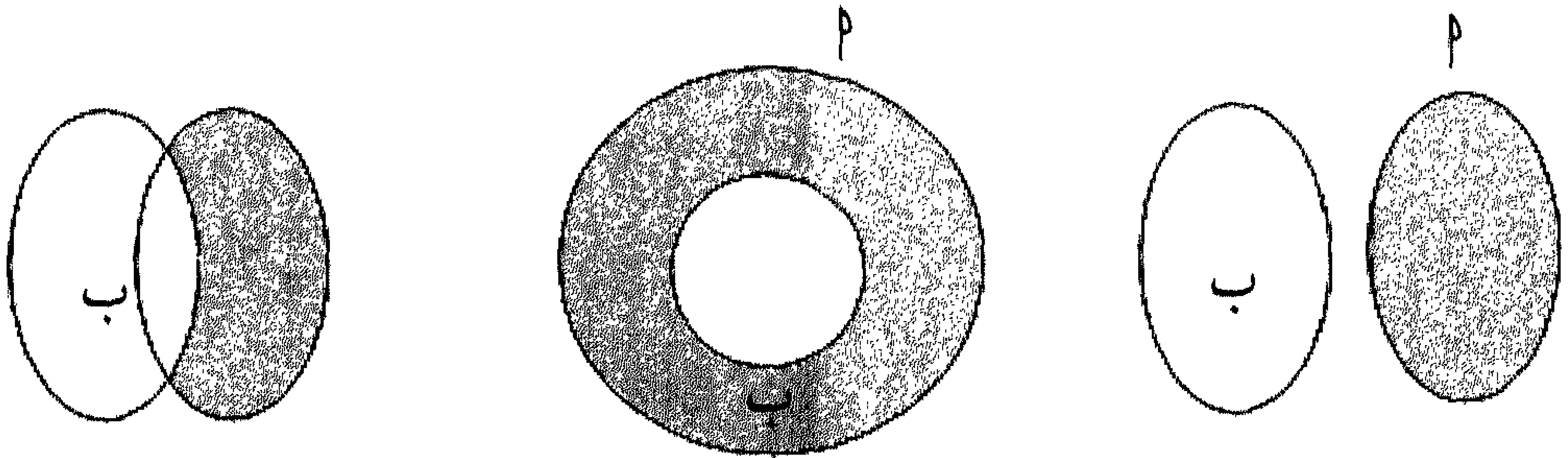
جـ) أ ∩ ∅ = ∅

تعريف (١-٢-٣):

إذا كان أ ، ب مجموعتين فإن الفرق بين المجموعة أ والمجموعة ب هو المجموعة التي تتكون من جميع عناصر المجموعة أ والتي لا تنتمي إلى المجموعة ب ويرمز لذلك بالرمز أ − ب أي أن:

أ − ب = {س: س ∈ أ و س ∉ ب}

التعبير عن الفرق باشكال فن في الأشكال الآتية:



أ − ب

الجز المضلل هو يمثل الفرق أ − ب

إذا كانت أ ⊇ ب فإن أ − ب تسمى مكملة المجموعة ب بالنسبة للمجموعة أ و تكتب: ب̄ أ

على الرغم من أن المجموعة الشاملة بالمعنى المطلق غير موجودة فإنه في كل حالة نتعامل فيها مع المجموعات تكون هناك مجموعة شاملة نسبية فعلى سبيل المثال عند التعامل مع مجموعة الطلبة القاطنين في يفرن نستطيع فرض أن مجموعة الطلبة القاطنين في الجماهيرية مجموعة شاملة، ويرمز لها عادة بالرمز ك وبالتالي نستطيع القيام بعمليات مختلفة على مجموعة الطلبة القاطنين في يفرن.

إذا كانت أ هي المجموعة الشاملة فإن أ − ب = ك − ب تسمى مكملة ب (ويرمز لها بالرمز $\overline{ب}$) رمزياً كما يلي: $\overline{ب}$ = {س ∈ ك: س ∈ ب}

مثال (٨):

إذا كانت ك مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وكانت ب مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية فإن $\overline{ب}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الفردية.

من تعريف المكملة نلاحظ أن:

أ) $أ \cup \overline{أ} = ك$ ب) $أ \cap \overline{أ} = \varnothing$

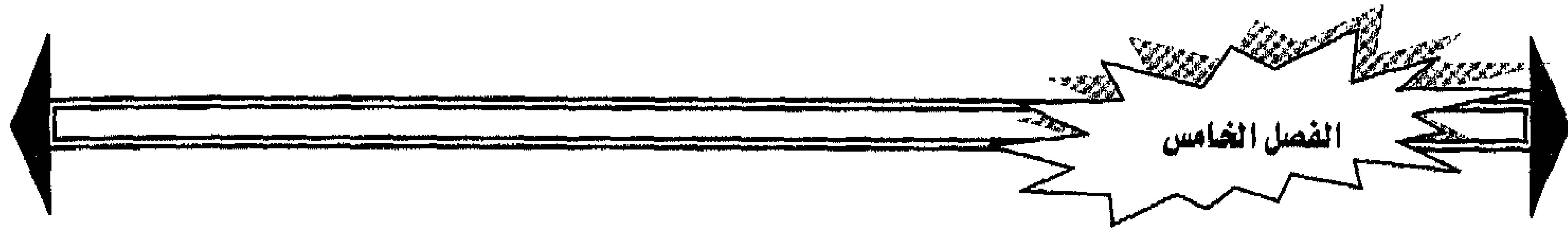
ج) $\overline{\varnothing} = ك$ د) $\overline{ك} = \varnothing$

تمارين (١-٢):

١- أكتب المجموعات الآتية بإحدى الطريقتين:

أ - مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية.

ب- مجموعة الأعداد التي تتكون من $٢^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب.



جـ - مجموعة الأعداد التي تتكون من $٣^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب.

٢- إذا كانت أ مجموعة سكان الجماهيرية، ب مجموعة سكان جمهورية مصر العربية مجموعة جـ النساء في الوطن العربي فأوجد:

أ) أ ∩ ب ∩ جـ   ب) أ – ب   جـ) أ – جـ   د) جـ – أ

٣- إذا كانت أ ∩ ب = {٢، ٦} حيث أ = {١، ٤، ٧، أ'} و ب = {٣، ٤، ٦، ١١}

فأوجد: أ'

٤- إذا كانت أ ⊆ ب و ب ⊆ جـ فبرهن أن أ ⊆ جـ

٥) برهن أن:

(أ – ب) (ب - أ) – (أ ∪ ب) – (أ ∩ ب)

٦) برهن أن:

١) أ ∪ (ب ∩ جـ) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ جـ)

٢) أ ∩(ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

٧) برهن أن:

أ - (أ ∪ ب) = $\bar{أ}$ ∩ $\bar{ب}$

ب- (أ ∩ ب) = $\bar{أ}$ ∪ $\bar{ب}$

٨) إذا كانت أ، ب مجموعتين منتهيتين وكان ع (أ) هو عدد عناصر أ وع (ب) هو عدد عناصر ب فبرهن أن:



ع (ٳ ∪ ب) = ع (ٳ) + ع (ب) – ع (ٳ ∩ ب)

٩) إذا كانت = { ٳ'، ب'، جـ' } فإوجد كل المجموعات الجزئية من ٳ

* يرمز لكل المجموعات الجزئية من ٳ بالرمز ل(ٳ) وتسمى مجموعة القوى للمجموعة ٳ

١٠) إذا كانت {ٳن'} ن' ∋ ن عائلة مجموعات جزئية، وعرفت العائلة {ب$_{ن'}$}$_{ن' \ni ن}$ حيث أنّ:

ب$_{ن'}$ = ٳ$_{ن'}$ - ∪$^{ن-1}$ ٳ$_{م}$، ..... ب$_{٢}$ = ٳ$_{٢}$ – ٳ$_{١}$، ب$_{١}$ = ٳ$_{١}$

برهن أن{ب$_{ن'}$}$_{ن' \ni ن}$ عائلة من المجموعات المنفصلة وأن:

∪$^{ن-1}$ ٳ$_{ن}$ = ∪$^{ن-1}$ ب$_{ن}$

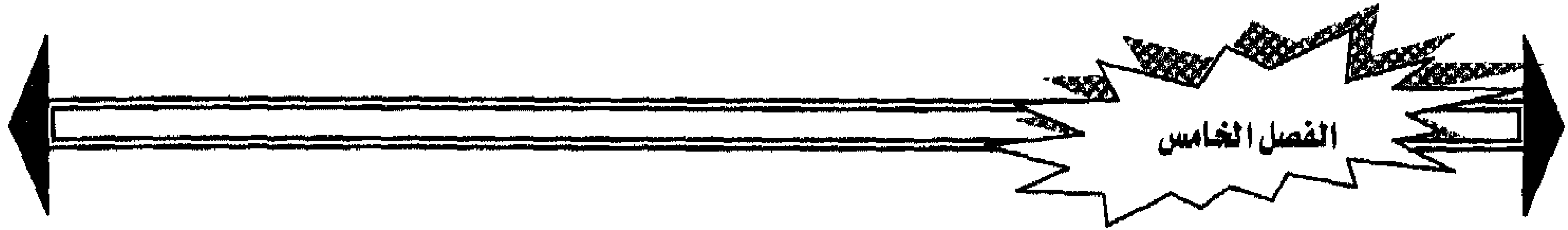
(١-٣) الدوال: Functions

إذا كانت ٳ، ب مجموعتين فإنه يمكن تكوين مجموعة جديدة تسمّى حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين ٳ، ب ويكتب ٳ × ب أي أنّ = {(س،ص): س ∋ ٳ، ص∋ ب}

حيث أنّ (س، ص) زوج مرتب

لنفرض أنّ ٳ، ب مجموعتان

العلاقة الثنائية ℜ من ٳ إلى ب هي مجموعة جزئية من ٳ × ب ومن المعتاد أن تكتب ٳ' ℜ ب' أو ($\overline{ٳ}$ ،$\overline{ب}$) وتقرأ ٳ مرتبطة بعلاقة ℜ مع ب.



عندما تكون ا = ب فإننا نقول بأن $\Re$ علاقة على ا.

نطاق العلاقة $\Re$ وهو مجموعة كل العناصر ا′ في ا حيث ا′ $\Re$ ب′ لبعض ب′ و ب ويرمز لذلك بالرمز مدى ($\Re$) أي أن:

مدى (Dom) ($\Re$) = {ا′ ∈ ا: ∃ب′ ∈ ب (Aب) ∈ $\Re$} حيث ∃ يعني يوجد.

أما مدى العلاقة $\Re$ فهو مجموعة كل العناصر ب′ في ب حيث ا $\Re$ ب لبعض ا′ ∈ ا ويكتب مجال ($\Re$) أي أن: مجال (Ran) ($\Re$) = { ب′ ∈ ب: ∃ ا′ ∈ ا و (ا، ب) ∈ $\Re$}.

مثال (٩):

إذا كانت ا = {٢، ٥، ٦} وكانت $\Re$ تعني قاسم فأوجد:

ا) ا × ا ب) العلاقة $\Re$ على ا

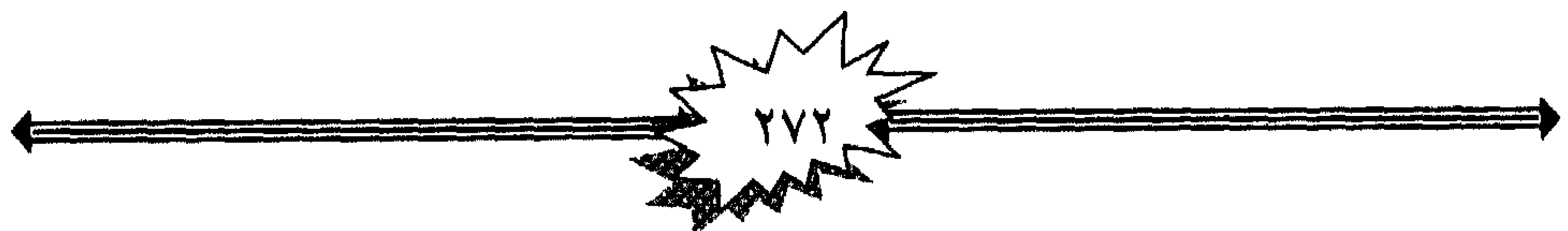
الحل:

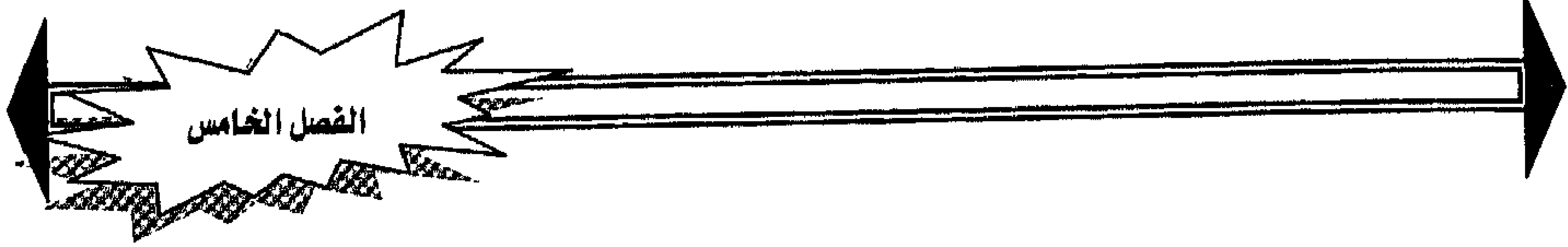
ا × ا = {(٢،٢)، (٥،٢)، (٢،٦)، (٥،٢)، (٥،٥)، (٥، ٦)، (٦،٢)، (٦،٥)، (٦،٦)}

$\Re$ = { (٢،٢)، (٢،٦)، (٥،٥)، (٦،٦) }

إذا كانت ا، ب مجموعتين وكانت $\Re$ علاقة من ا إلى ب فإن معكوس العلاقة $\Re$ هي العلاقة $\Re^{-1}$ من ب إلى ا حيث ب $\Re$ $ا^{-1}$ إذا وإذا كان فقط ا $\Re$ ب أي أن:

$\Re^{-1}$ = {(ب′، ا′): (ا′، ب′) $\Re$}





❖ **تعريف (١-٣-٢):**

إذا كانت $\Re$ علاقة على أ فإننا نقول بأن العلاقة $\Re$ علاقة:

أ – انعكاسية، وهذا يعني أ′ $\Re$ أ′ أن لكل أ′ ∋ أ′

ب- متماثلة ← وهذا يعني أنه إذا كان أ′ $\Re$ ب′ فإن ب′ $\Re$ أ′

جـ- ناقلة ← وهذا يعني أنه إذا كان أ′ $\Re$ ب′ و جـ′ $\Re$ ب′ فإن أ′ $\Re$ جـ′

د – متكافئة ← وهذا يعني أن علاقة انعكاسية ومتماثلة وناقلة

تعريف (١-٣-٣):

لنفرض أن س، ص مجموعتان:

الدالة ى من س إلى ص هي علاقة من س إلى ص بحيث تحدد لكل عنصر.

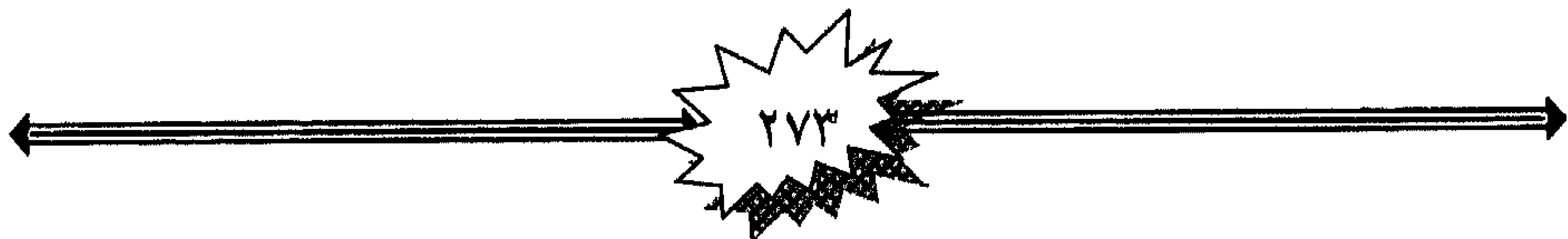
عنصر وحيد س′ ∋ س حيث ص′ ∋ ص وتكتب: ى (س′) = ص′، ى: × ←ص

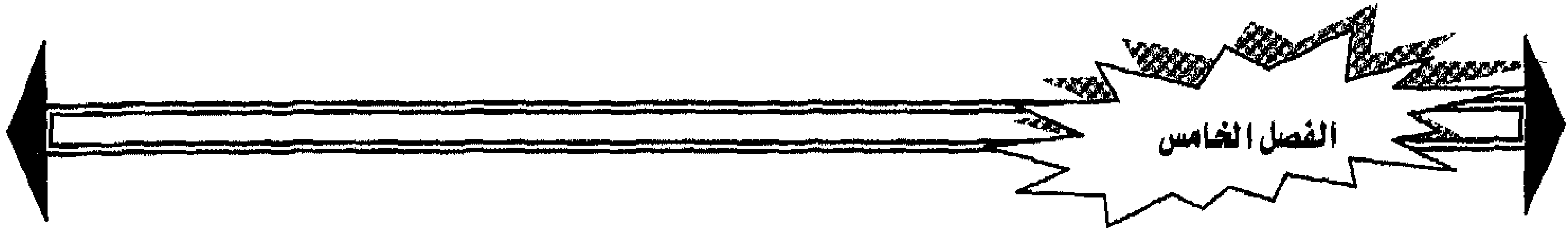
المجموعة س تسمى نطاق والمجموعة { ص′ = (س′): ص′ ∋ ص} تسمى مدى ى ولكن المجموعة ص تسمى نطاق المصاحب للدلالة ى

الدالتان ى، هـ متساويتان (ى = هـ) إذا كان لهما نفس النطاق وإن ى (س′) = هـ (س′) لكل س′ في النطاق

مثال (١٠):

الدالتان ى (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ و هـ (س) = س + ٢





دالتان غير متساويتان رغم أن ى (س) = س + ٢ عندما س ≠ ٢

لأن نطاق ى هو كل الأعداد الحقيقية عدا س = ٢ ونطاق هـ هو كل الأعداد الحقيقية ولهذا فإن نطاق ى يختلف عن نطاق هـ

الدالة ى: س ← ص تسمى دالة فوقية (outo) إذا كان لكل ص′ ∈ ص هناك س′ ∈ س حيث ى (س′) = ص′ تسمى أحادية (one – to – one).

إذا كان ى (س١′) = ى (س٢′) يؤدي إلى أن: س١ = س٢

إذا كانت ى دالة أحادية وفوقية فإنها تسمى تقابل أحادي

لاحظ أن ى⁻¹ بصفة عامة لا تعرف دالة وذلك لأنه إذا كانت ى غير فوقية فإن هناك ص′ ∈ ص لا يكون صورة لأي س′ ∈ س أي أن ى⁻¹ (ص′) = ∅ والسبب الآخر أنه إذا كانت ى غير أحادية وهذا يعني أنه لبعض ص′ ∈ ص هناك على الأقل عنصرين س١′، س١′ ∈ س حيث س١′ ≠ س٢′ ولكن ى (س١′) = ى (س٢′) وهذا يعني أن ى⁻¹ (ص′) ليس وحيداً ومن هنا نستنتج أن ى⁻¹ تعرف دالة من ص′ إلى س إذا وإذا كانت فقط تقابل أحادي.

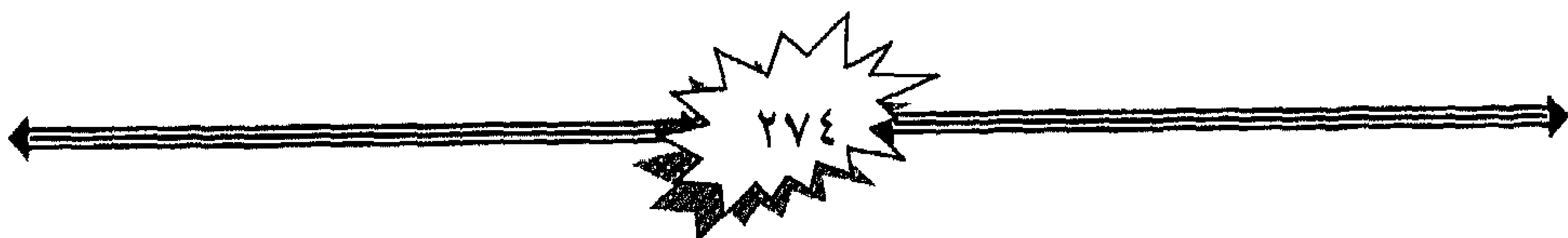
❖ **تعريف (١-٣-٤):**

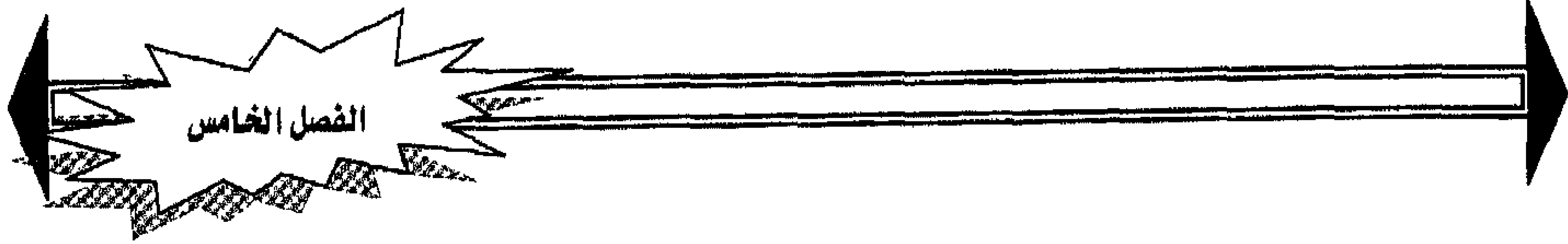
إذا كانت ى: س ← ص، هـ: ص ← ع دالتين فإن:

الدالة التركيبية هـ ∘ ى: س ← ص تعرف كما يلي:

(هـ ∘ ى) س (هـ (س))

لكل س′ ∈ س





يستطيع القارئ إثبات أنه إذا كانت ں: س ← ص

و ك: ع ← ل دوال فإن: (ك ∘ هـ) ∘ ں = ∘ ك (هـ ∘ ں)

كذلك من السهل إثبات أنه إذا كانت هـ، ں دالتان حاويتان فإن هـ ∘ ں دالة أحادية وإذا كانت هـ، ں دالتان فوقيتان فإن هـ ∘ ں دالة فوقية

الدالــة: <: س س والمعرفــة بالــصيغة < (س′) = س لكــل س′ ∋ س تسمى الدالة المحايدة على س.

إذا كانت ں: س ← ص دالة أحادية وفوقية فإن:

أ) < ص = ص ∘ ص$^{-1}$ ب) ص$^{-1}$ ∘ ص = < س

❖ **تعريف (١-٣-٥):**

إذا كانت ں: س ← ص دالة وكانت أ ≥ س فـإن ں ∘ <$_{أ}$: ← أ ص تسمى تقييد الدالة ں على أ ويرمز لذلك بالرمز ں$_{|أ}$ أي أن:

ں$_{|أ}$: ← أ ص حيث ں$_{|أ}$ = ں ∘ <$_{أ}$

لاحظ أن: س ∋ أ لكل ں$_{أ}$ (س) = ں (س)

إذا كانت ں: س ← ص دالة وكانت أ ≥ س، ب ≥ ص

ں (أ) = { س′ ∋ س: ں (س)∋ أ }

و ں$^{-1}$ (ب) = { س′ ∋ س: ں (س)∋ ب}

لاحظ أن ں$^{-1}$ (ب) لها وجود حتى ولو كانت ں لا أحاديـة ولا فوقيـة فإذا كانت لا أحادية فإن ں$^{-1}$ (ب) يتكون من أكثر من عنصر حتى ولـو كانـت



ب تتكون من عنصر واحد أما إذا كانت ى لا فوقية فإنه قد يحصل أن تكون ى$^{-1}$ (ب) = ∅ حتى لو كانت ب ≠ ∅

مبرهنة (١-٣-١):

إذا كانت ى: س ← ص دالة وكانت أ ≥ س، ب ≥ ص فإن:

أ) أ ≥ ى$^{-1}$ (ى (أ))

ب) ى (ى$^{-1}$ (ب)) ≥ ب

البرهان:

أ- نفرض أن: أ′ ∋ أ

هذا يعني أن ى (أ′) ∋ ى (أ) ومن ذلك نصل إلى أن: أ ∋ ى$^{-1}$ (ى (أ)) والذي يعني أن أ ≥ ى$^{-1}$ (ى (أ))

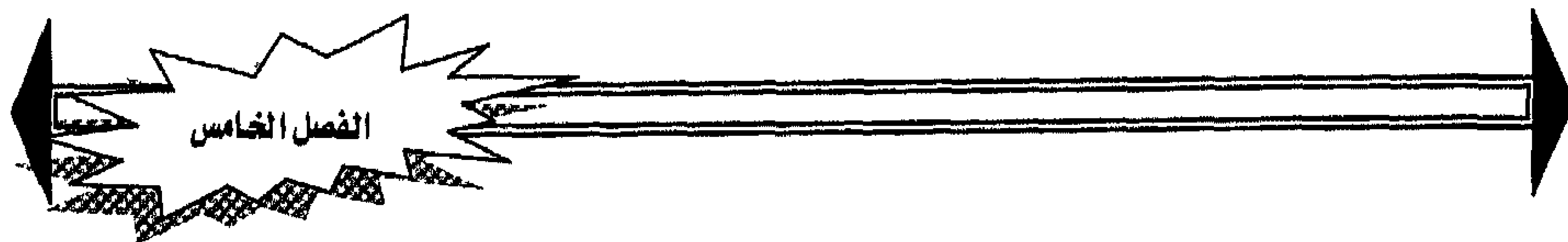
ب- نفرض أن: ص′ ∋ ى (ى$^{-1}$ (ب))

هذا يعني أن ى (س′) و ص′ لبعض: س ∋ ى$^{-1}$ (ب) وبدوره يعني أن ص = ى (س) ∋ ب ومنه نصل إلى الاستنتاج: ى$^{-1}$ (ى (أ))

في المبرهنة السابقة إذا كانت ى دالة أحادية فإن: ى (ى$^{-1}$ (ب)) = ب

نرجع مرة أخرى إلى العلاقة الثنائية ونفرض في هذا الحال أن $\Re$ علاقة متكافئة على المجموعة س

هناك تجمع من المجموعات الجزئية من س تحدد العلاقة $\Re$ وهذا التجمع يجزئ المجموعة س.



تعريف (١-٣-٦):

إذا كانت س′ ∈ س وكانت $\Re$ علاقة متكافئة على س فإن المجموعة:

[س′] = { ص′ ∈ ص : س′ $\Re$ ص′} تسمى بالفصل المتكافئ للعنصر س (Equivalence class)

يرمز لمجموعة كل الفصول المتكافئة للمجموعة س بالعلاقة$\Re$ وبالرمز: س′ ∈ س، س/ $\Re$ = {[س′]} من الواضح أن [س] ≠ ∅ لأن س ∈ [س] من الخاصية: س$\Re$ س

المبرهنة التالية توضح أن أي فصلين متكافيئن أما أن يكونا متطابقين أو ليس بينها أي شيء مشترك.

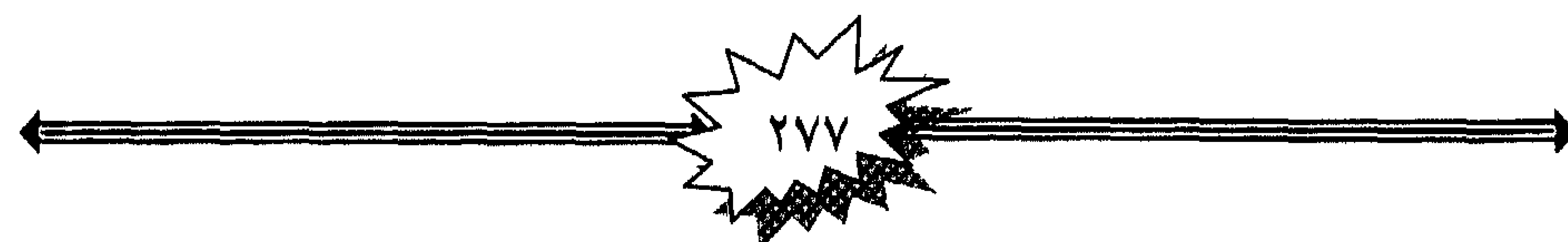
مبرهنة (١-٣-٢):

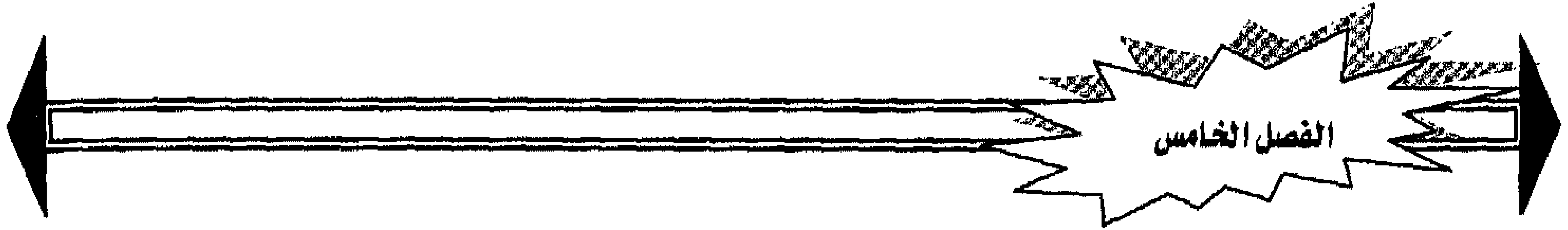
إذا كانت س مجموعة غير خالية وكانت $\Re$ علاقة متكافئة على س فإن س′ $\Re$ ص′ إذا وإذا فقط [ص′] = [س′]

البرهان:

لنفرض أن س′ $\Re$ ص′

إذا كان ع ∈ [س′] فإن ذلك يعني أن ع $\Re$ س′ وحيث أن س′ $\Re$ ص′ فإن ع $\Re$ ص′ من خاصية الانتقال والأخير يعني أن ع ∈ [ص′] وبذلك نكون قد برهنا أن[س] ⊆ [ص] وبنفس الطريقة يمكن برهنة أن [ص] ⊆ [س] وهذا يعني أن [س] = [ص]





ولبرهنة الاتجاه المعاكس، نفرض أن [س] = [ص]

من الواضح أن س ∋ [س] ومن المساواة نصل إلى أن س ∋ [ص] وهذا يعني أن س $\Re$ ص

نستطيع استنتاج أن هناك تقابل أحادي بين العلاقات المتكافئة على س′ وتجزئيات س بعض آخر كل علاقة متكافئة على س تعطي تجزئ للمجموعة س وكل تجزئ للمجموعة س يعرف علاقة متكافئة على س.

تمارين (١-٣):

١) إذا كانت ى: ح ← ح والمعرفة بالصيغة ى (س) = س^{٢} + أ س + ب حيث: أ، ب ∋ $\Re$ ثابتان فوضح أن ى ليست أحادية

٢) إذا كانت ى: ح ← ح والمعرفة بالصيغة ى (س) = س^{٢} وكانت هـ: ح ← ح والمعرفة بصيغة ى (س) = س + ١ فأوجد: ى ∘ هـ

٣) إذا كانت ى: س ← ص دالة أحادية وفوقية فبرهن أن ى$^{-١}$ دالة أحادية وفوقية أيضاً.

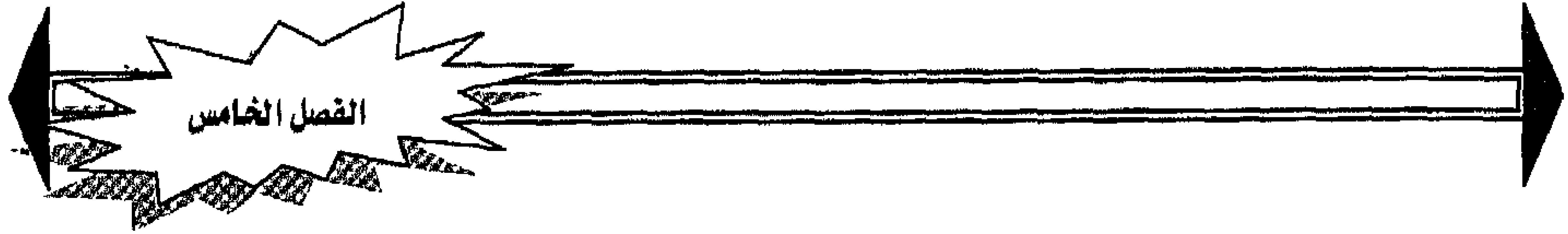
٤) إذا كانت س مجموعة منتهية وكانت ى دالة أحادية من س إلى نفسها فبرهن أن ى لابد أن تكون فوقية

٥) إذا كانت ى: س ← ص، هـ: ص ← ع دالتان فوضح أن:

أ - إذا كانت ى ∘ هـ فوقية فإن ى فوقية

ب- إذا كانت ى ∘ هـ أحادية فإن هـ أحادية





جـ- إذا كانت هـ، ق كلاً من أحادية فإن ق ∘ هـ أحاديـة و(ق ∘ هـ)$^{-1}$

= ق$^{-1}$ ∘ هـ$^{-1}$

٦) وضح أنه إذا كانت ق: س ⟵ ص دالة فوقية فإن ق (ق$^{-1}$ (ب)) =

ب حيث ب ⊆ ص′ ⊆ ا ص حيث ا = ق (ق$^{-1}$ (ا))

٧) إذا كانت ق: س ⟵ ص دالة أحادية فبرهن أن:

⊆ ا ص حيث ا = ق$^{-1}$ (ق (ا))

٨) إذا كانت ق دالة فوقية وكان ل* تجزئة للمجموعة س، فبرهن أن:

ل* = { ق$^{-1}$ (ل): ل ∈ ل*}

إرشاد: ل تجزئ للمجموعة س، إذا كان

ا) ∅ ∈ ل*

ب) ا ∩ ب = ∅ أو ا = ب أما أن ا، ب∈ ل*

جـ) $\cup_{ل \in ل*}$ ل = س

٩) إذا كانت ق: س ⟵ ص دالة وكانت ا، ب ⊆ س فبرهن أن:

ا) ق (ا ∪ ب) = ق (ا) ∪ ق (ب)

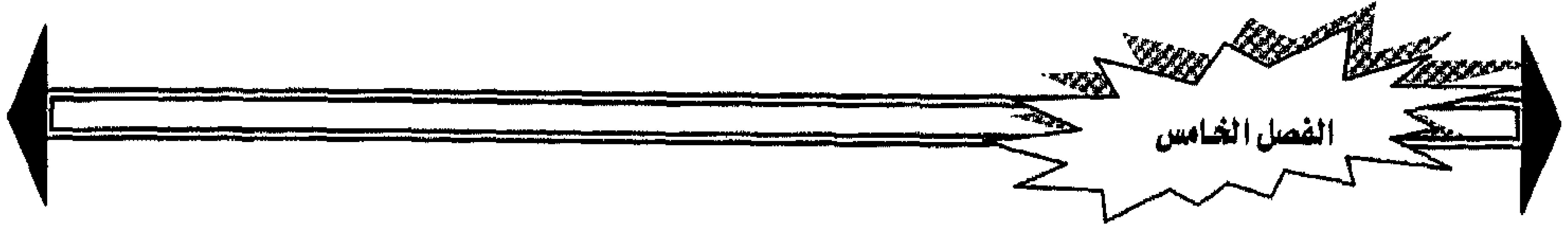
ب) ق (ا ∩ ب) ⊆ ق (ا) ∩ ق (ب)

جـ) ق (ا) - ق (ب) ⊆ ق (ا - ب)

١٠) إذا كانت ق: س ⟵ ص دالة فبرهن أن: ق دالة أحادية إذا وإذا كان فقط:

ق (ا ∩ ب) = ق (ا) ∪ ق (ب)





(٤-١) مجموعة الدوال الأحادية والفوقية من س إلى نفسها :

إذا كانت س مجموعة فإن مجموعة الدوال الأحادية والفوقية من س إلى نفسها يرمز لها بالرمز ﻡ (س)

إذا كانت س مجموعة منتهية ليكن عدد عناصرها ن فإن ﻡ (س) في هذه الحالة تسمى زمرة التباديل بدرجة ن ويرمز لها بالرمز $س_ن$.

من الملاحظ أنه إذا كان ق، هـ ∋ ﻡ (س) فإن ق ∘ هـ ∋ ﻡ (س) وإذا كانت ك ∋ ﻡ (س) فإن (ق ∘ هـ) ∘ ك = ق ∘ (هـ ∘ ك) وإضافة إلى ذلك فإن هناك < ∋ ﻡ (س) حيث ق ∘ < = < ∘ ق = ق وأخيراً لكل ق ∋ ﻡ (س) هناك هـ ∋ ﻡ (س)

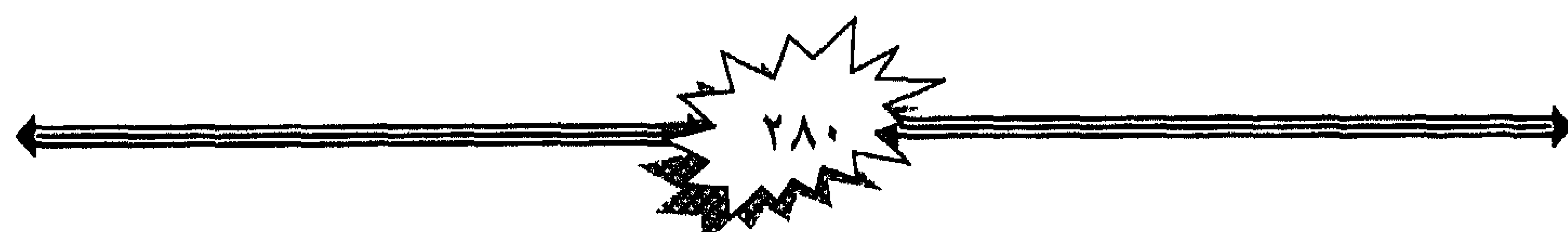
إذا كانت (س′) تحتوي على ن من العناصر إن عدد عناصر ﻡ (س) يساوي حيث أن ق ∘ هـ = هـ ∘ ق ن ! حيث ن! = ١ × ٢ × ٣ × ..... ×ن

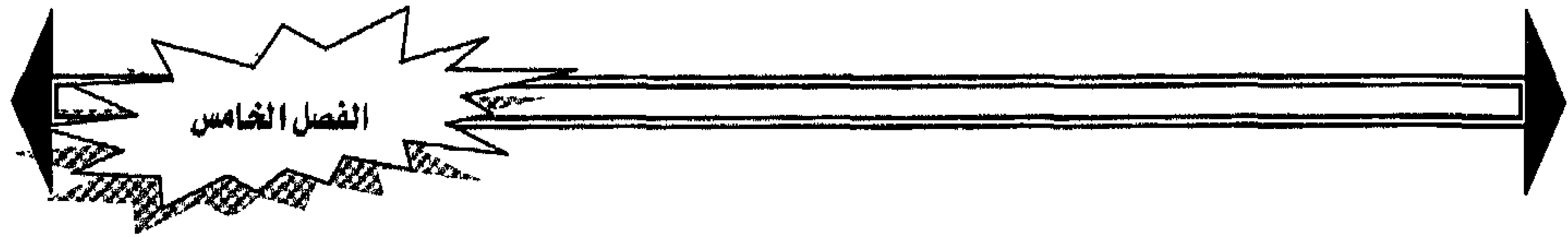
لتوضح ذلك نفرض أن

س = {$س_١$، $س_٢$، .....، $س_ن$} وأن ق ∋ ﻡ (س)

ق لها ن من الخيارات لنقل العنصر $س_١$ وحيث أن ق أحادية فإن ق لها (ن – ١) من الخيارات لنقل العنصر $س_٢$ لأن ق ($س_٢$) ≠ ق ($س_١$) وهكذا فإن ق لها ن – (د′ – ١) من الخيارات لنقل العنصر $س_{د′}$

إذن عدد عناصر ﻡ (س) يساوي ن (ن – ١) (ن – ٢) ... (ن – (د′ - ١) ..... ١ – ن! حتى نتجنب التكرار فإذا كانت ق ∋ ﻡ (س) فإن $ق^٠$ = ١، $ق^٢$ = ق ∘ ق، .....، وهكذا وأخيراً $ق^{-ن}$ = $(ق^{-١})^ن$





تمارين (١-٤)

١) إذا كانت ن ∈ $س_٣$ فوضح أن $ن^٦$ = د

٢) إذا كانــت س مجموعــة غــير منتهيــة وكانــت م = { ن ∈ م (س′): ن(س′) ≠ س′ } فوضح أن:

أ- إذا كانت ن، هـ ∈ م فإن ن ∘ هـ ∈ م

ب- إذا كانت ن ∈ م فإن $ن^{-١}$ ∈ م

٣) الدالة هـ في م (س) تتبادل مع الدالة ن في م (س) إذا كـان ن ∘ هـ = ن ∘ هـ فإذا كانت ن: س ← س معرفة كما يلي: ن (س) = (س)، ن ($س_٢$) = ($س_١$)

ن ($س_١$) =($س_٢$) لكل $س_١$ ≠ س، $س_٢$ ≠ س

أوجد كل العناصر في م (س) والتي تتبادل مع ن

٤) إذا كانت ج (ن) = { هـ ∈ م (س): ن ∘ هـ= ن ∘ هـ}

نبرهن أن:

أ - ن ∘ هـ ∈ ج (ن) يؤدي إلى أن: هـ، ك ∈ ج (ن)

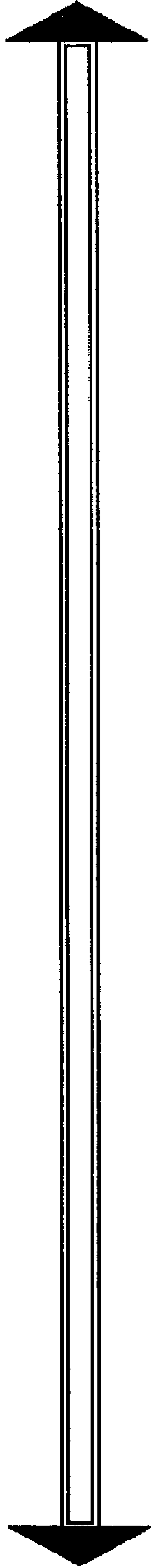
ب- $هـ^{-١}$ ∈ ج (ن) يؤدي إلى أن: هـ ∈ ج (ن)

ج- (ن) مجموعة غير خالية

٥) إذا كانت ط مجموعة الاعداد الطبيعية وكانت خ مجموعة جزئية لا نهائيـة من ط فوضح أن هناك دالة أحادية وفوقية

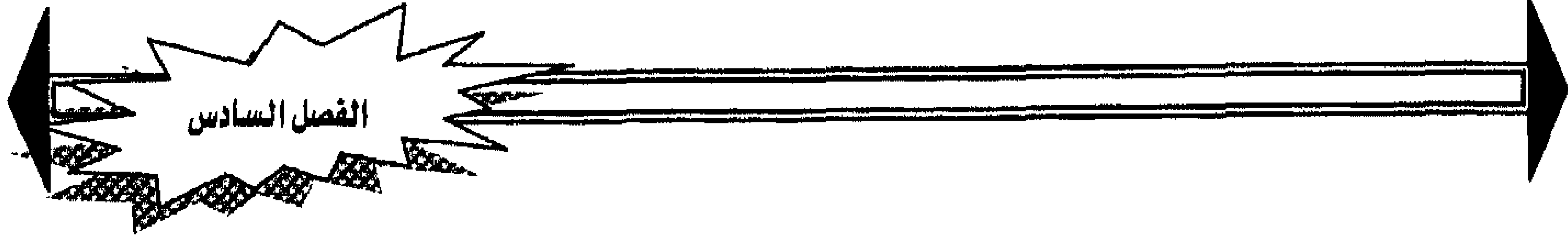
ن: ح ← ط







التوابع - النهايات - الاستمرار



الفصل السادس

التوابع - النهايات - الاستمرار

تمهيد نظري:

سنورد فيما يلي بعض التعاريف والنظريات والقواعد التي تتعلق بالتوابع والنهايات والاستمرار التي نجد براهينها في كتب التحليل.

النهاية:

تقول عن المتحول س إنه ينتهي إلى العدد الثابت جـ فيما إذا أمكن إعطاء هذا المتحول فيما تقترب بقدر ما نريد من جـ وبحيث نقترب القمة المطلقة |س - جـ| بقدر ما نريد من الصفر .

إذا كانت قيم س تسعى نحو بقيم أكبر من هذا العدد قلنا أن س يسعى نحو جـ عند من اليمين كما نقول بانه ينتهي إلى جـ من اليسار فيما إذا سعت قيمته نحو جـ بقيم أصغر منه.

نهاية تابع:

نقول أن التابع ت(س) = ص ينتهي إلى نهاية معينة ل عندما يسعى س إلى جـ إذا أمكن الموافقة بين كل عدد موجب م وعدد موجب ε آخر بحيث إذا تحولت س ضمن المجال (جـ - م، جـ + م) بقيت قيم ص المقابلة صورة ضمن المجال (ل – ε، ل + ε) وذلك مهما كان ε صغيراً.



إن هذا يعني أنه مهما كان العدد ε صغيراً فإن المجال (ل − ε، ل + ε) يحوي عدداً لا متناهياً من قيم التابع ىه(س) التي تقابل قيماً لـ س مجاورة لـ ﺃ نقول أن للتابع المذكور نهاية من اليمين فيما إذا تحقق ما ذكرناه عندما يسعى س نحو ﺟ من اليمين كما نقول أن لهذا التابع نهاية من اليسار إذا تحقق ما ذكرناه أعلاه عندما يسعى س نحو ﺟ من اليسار

خواص النهايات:

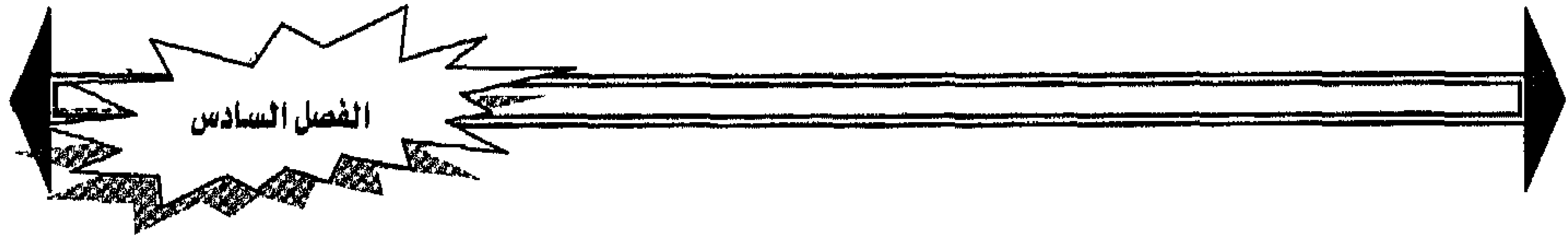
إذا انتهى التابعان ىه(س)، هـ(س) إلى نهايتان ل١ ل٢ وذلك عندما يسعى المتحول س إلى ﺟ فأنه يكون:

نهايتا ىه(س) + ﺃ، ىه(س) × ﺃ، هما ل١ × ﺃ، ل١ . ﺃ حيث عدد ﺃ ثابت نهاية جراء التابعين تساوي جراء نهايتي هذين التابعين ىه(س)، هـ(س) بشرط وجودهما.

نهاية حاصل قسمة هذين التابعين تساوي حاصل قسمة نهايتيهما بشرط أن لا تكون نهاية المقسوم عليه مساوية الصفر.

يمكننا أن نذكر خواص أخرى مشابهة لما سبق من أجل قوة تابع وجذر تابع بشرط أن تكون هاتان العمليات ممكنتين في الساحة الحقيقية.

إذا انتهى التابع ىه(س) إلى نهاية معينة محصورة بين ﺃ و ب وذلك عندما ينتهي المتحول س إلى ﺟ فإنه يمكن إيجاد مجال حول ﺟ مثل (ﺟ − ﺃ، ﺟ + ﺃ) بحيث تبقى قيم التابع ىه(س) المقابلة لقيم س الواقعة ضمن هذا المجال المحصورة بين العددين ﺃ و ب إذا تحققت المتراجحة.



هـ(س) > ى(س) > ل (س)

عندما تكون س بجوار العدد الثابت ﺟ وإذا كان للتابعين هـ(س)، ل (س) نهايتان متساويتان عندما ينتهي س إلى ﺟ وكانت نهاية التابع ى(س) مساوية لهذه النهاية أيضاً وذلك ضمن الشروط المذكورة.

المتحول المستمر:

ليكن متحولاً اسمه س نقول عنه أنه يتحول باستمرار ضمن المجال (ا، ب) فيما إذا ى لكل قيمة حقيقية واقعة ا، ب بين ونسميه عندها بمتحول مستمر حقيقي.

التابع المستمر:

يكون التابع ى(س) مستمراً من أجل س = ﺟ فيما إذا انتهى التفاضل ى(س) - ى(ﺟ)

إلى الصفر وذلك عندما تسعى س نحو ﺟ من اليمين أو من اليسار يكون هذا التابع مستمراً ضمن المجال (ا، ب) فيما إذا كان مستمراً من أجل كل قيمة من قيم ها المجال.

خواص التوابع المستمرة:

إذا كان التابع ى(س) مستمراً ضمن المجال(ا، ب) فإن له في هذا المجال قيمة أكبر من جميع قيمه وقيمة آخرى أصغر من جميع قيمه.

إذا كان تابعاً ى(س) مستمراً ضمن المجال (ا، ب) فلابد من أن يمر مرة



على الأقل من كل قيمة واقعة بين ق(أ)، ق(ب) وذلك من أجل قيمة من قيم س الواقعة ضمن المجال(أ، ب) لا يمكن لتابع مستمر أن يغير إشارته دون أن ينعدم.

تقابل نهاية حاصل قسمة جيب قوس على هذه القوس مقدرة بالراديان منتهي إلى الواحد وذلك عندما يسعى القوس إلى الصفر:

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ س}{س} = ١$$

نهاية التركيب $\left(١ + \frac{١}{ن}\right)^{ن}$

يساوي العدد النيبيري هـ = ٢,٧١٨٣٠٠٠ وذلك عندما يسعى ن ⟵ ∞

١) ليكن التابع ق (س) = $\frac{٢س^{٢} + س - ٣}{٢س^{٢} + ٢س - ٥}$

أحسب نهاية هذا التابع عندما يسعى س نحو الصفر ثم نحو اللا نهاية وأخيراً نحو العدد (١).

١': إن نهاية هذا الكسر عندما ينتهي س نحو الصفر تساوي النسبة بين العدد الثابت الموجود في الصورة على العدد الثابت الموجود في المخرج:

$$\lim_{س \to ٠} ق(س) = \frac{نها\left(٢س^{٢} - س - ٣\right)}{نها\left(٣س^{٢} + ٢س - ٥\right)} = \frac{-٣}{-٥} = \frac{٣}{٥}$$

٢': من أجل حساب نهاية الكسر المفروض عندما س ⟵ ∞ نفرض أن $س = \frac{١}{ص}$ ونجعل ص ⟵ ٠ فيكون:

$$\lim_{س \to \infty} ق(س) = نها \frac{٢ + ص - ٣ص^{٢}}{٣ + ٢ص - ٥ص^{٢}} = \frac{٢}{٣}$$

٣': أما من أجل حساب نهاية هذا الكسر عندما س← ٠ فإننا نفرض س = ١ + ص ثم نجعل ص ← ٠ فيكون

$$\lim_{س \to ١} ق(س) = \frac{\lim ٢ص^{٢} + ٥ص}{\lim ٣ص^{٢} + ٨ص} = \frac{\lim ٢ص + ٥}{\lim ٣ص + ٨} = \frac{٥}{٨}$$

مثال أحسب نهاية التابع:

$$ص = \left(\frac{١+س}{١-س}\right)^{\frac{١}{س}}$$

وذلك عندما تنتهي قيمة المتحول س إلى الصفر

لنأخذ اللوغاريتم النيبيري للطرفين فنجد:

$$لو\ ص = \frac{١}{س} [\ لو\ (١ + س) - لو\ (١ - س)\ ]$$

يمكن كتابة هذه العلاقة استناداً إلى خواص اللوغاريتمات بالشكل التالي:

$لو\ ص = لو\ (١+س)^{\frac{١}{س}} + لو\ (١-س)^{\frac{-١}{س}}$ إن من المعلوم إن:

$$\lim_{ع \to صفر} (١+ع)^{\frac{١}{ع}} = هـ$$

فيكون لو ص = ٢

وأخيراً: $ص = هـ^{٢}$

مثال: أحسب عندما يسعى س نحو الواحد، نهاية الكسر:

$$ع = \frac{١ - س^{\frac{١}{٣}}}{١ - س^{\frac{١}{٥}}}$$

لنفرض أن ت = س فيكون $ت^{٥} = س^{1/3}$، $ت^{٣} = س$ وبأخذ الكسر المفروض الشكل:

$$ع = \frac{١-ت^{٥}}{١-ت^{٣}} = \frac{ت^{٥}-١}{ت^{٣}-١}$$

لنضع خارج قوس المضروب المشترك بين الصورة والمخرج فيكون:

$$ع = \frac{(ت-١)(ت^{٤}+ت^{٣}+ت^{٢}+ت+١)}{(ت-١)(ت^{٢}+ت+١)} = \frac{ت^{٤}+ت^{٣}+ت^{٢}+ت+١}{ت^{٢}+ت+١}$$

عندما يسعى س إلى الواحد يسعى ت إلى الواحد أيضاً حسبما فرضنا أعلاه وينتهي عندها ع إلى $\frac{٥}{٣}$

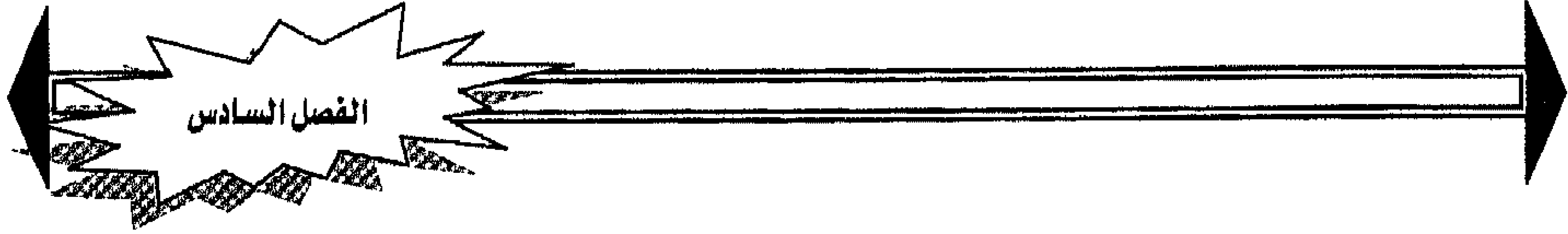
٤- ادرس نهاية التابع عندما يسعى المتحول س نحو الصفر.

$$ص = \frac{\text{جا } ٢ \text{ س}}{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}$$

يمكن كتابة الصورة بالشكل: ٤ جا$\frac{س}{٢}$، جتا $\frac{س}{٢}$ جتا س كما يمكن كتابة المخرج بالشكل (٢ جا٢) $^{\frac{١}{٢}}$، إن المقدار الأخير موجب ولذلك فهو يساوي^{٢} |جا^{٢} $\frac{س}{٢}$|$^{\frac{١}{٢}}$ ويأخذ التابع المفروض الشكل:

$$ص = \frac{٤\text{جا}\frac{س}{٢}.\ \text{جتا}\frac{س}{٢}.\ \text{جتا س}}{\sqrt{٢}\left|\text{جا}\frac{س}{٢}\right|}$$

إذا انتهى س إلى الصفر بالقيم الموجبة كان جا $\frac{س}{٢}$ موجباً ويمكن اختصاره مع | جا$\frac{س}{٢}$ | وينتهي عندها التابع المفروض إلى ٢ $\sqrt{٢}$ أما إذا انتهى س إلى الصفر بالقيم السالبة فإن جا $\frac{س}{٢}$سالب ويمكن كتابته بالشكل - | جا $\frac{س}{٢}$ |



وينتهي عندها التابع إلى $-\ ٢\ \sqrt{٢}$

إذا فرضنا ق (س) = ص فإنه يمكننا أن نكتب:

ق(+ ٠) = ٢ $\sqrt{٢}$ ق (- ٠) = -٢ $\sqrt{٢}$

٥) أحسب نهاية التابع التالي وذلك عندما يسعى المتحول ∞ إلى $\frac{\pi}{٢}$

ص = (جا ∞ - ١) ت هـ^{٢} ∞

يمكن كتابة التابع المفروض بالشكل:

$$ص = \frac{جا\ \wp^{٢}\ (جا\ \wp - ١)}{جتا^{٢}\ \wp} = \frac{جا\ \wp^{٢}\ (جا\ \wp - ١)}{جا^{٢}\ \wp}$$

وبتقسيم الصورة والمخرج على ١ − جا$\wp$ يكون:

$$ص = \frac{-\ جا\ \wp^{٢}}{١ + جا\ \wp}$$

ومن الواضح أن نهاية هذا المقدار تساوي (- $\frac{١}{٢}$) وذلك عندما يسعى المتحول إلى $\frac{\pi}{٢}$

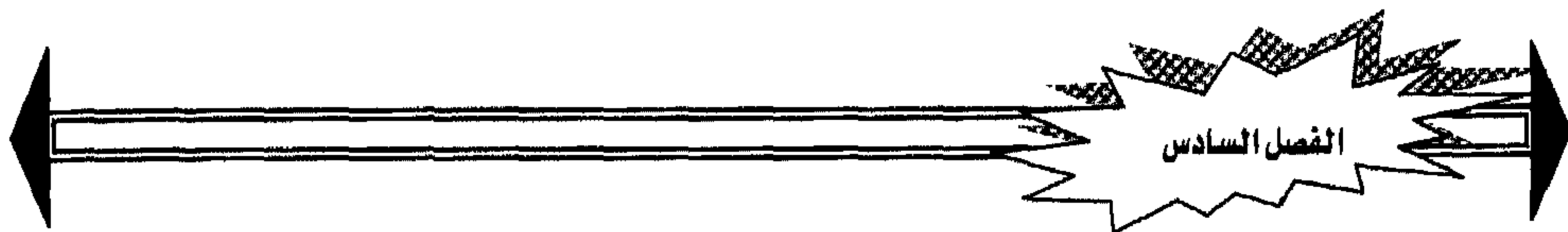
٦- أحسب نهاية التابع التالي وذلك عندما يسعى المتحول ψ إلى γ:

$$ص = \frac{جتا\,\psi - جتا\,\gamma}{جا\,\psi - جا\,\gamma}$$

استناداً إلى دساتير التحويل في المثلثات يمكن كتابة هذا التركيب بالشكل التالي:

$$ص = \frac{٢\ جا\ \frac{\psi - \gamma}{٢} .\ جا\ \frac{\psi + \gamma}{٢}}{٢\ جا\ \frac{\gamma - \psi}{٢} .\ جتا\ \frac{\gamma + \psi}{٢}}$$





وبعد الاختصار على جا $\frac{\gamma-\psi}{٢}$ يأخذ الشكل:

$$ص = \frac{-جا\ \frac{\psi+\gamma}{٢}}{جتا\ \frac{\psi+\gamma}{٢}}$$

ويكون نها ص = - ت هـ γ

٧- احسب نهاية الكسر التالي وذلك عندما تسعى س نحو العدد ٣:

$$\frac{\sqrt{س^{٢}-٩}}{س-٣} \qquad \frac{\pi}{٢}$$

يجب أن نميز في التمرين بين النهاية من اليسار والنهاية من اليمين لأن صورة الكسر المفروض موجبة بينما يتحول من سالب إلى موجب عندما نجتاز قيم س العدد ٣ من اليسار، يمكننا كتابة الكسر السابق بالشكل:

$$\frac{\sqrt{س-٣}\cdot\sqrt{س+٣}}{\sqrt{س-٣}\cdot\sqrt{س+٣}}$$

من أجل قيم س التي تجعل صفر > س − ٣ لأن المخرج بشكله الجديد كما هو واضح: موجب ويأخذ بعد الاختصار الشكل: $\frac{\sqrt{س+٣}}{\sqrt{س-٣}}$ الذي يسعى إلى (+∞) عندما يسعى س إلى ٣ من اليمين.

أما عندما نجعل قيم س نسعى إلى العدد ٣ من اليسار فإن المقدار الموجود تحت الجذر في الصورة يصبح سالباً من أجل القيم المجاورة للعدد (٣) ويعني أنه ليس لهذا الكسر نهاية من اليسار.

٨- ما هي نهاية التابع:



(١) $ص = \frac{\sqrt[ن]{س} + \sqrt[ن]{أ}}{س - أ}$ وذلك عندما تنتهي س إلى أ

الحل: نفرض أن $ع = \sqrt[ن]{س}$، $ب = \sqrt[ن]{أ}$ فيكون $س = ع^{ن}$، $أ = ب^{ن}$

فيأخذ الكسر الشكل:

$$(٢)\quad ع = \frac{ع - ب}{ع^{ن} - ب^{ن}}$$

إن من المعلوم أن:

$$ع^{ن} - ب^{ن} = (ع - ب)\,(ع^{ن-١} + ب\,ع^{ن-٢} + ب^{٢}\,ع^{ن-٣} + ,,,, + ب^{ن-٢}\,ع + ب^{ن-١})$$

وإذا بدلنا مخرج الكسر (٢) بالطرف الثاني من العلاقة فإن الكسر المذكور يأخذ الشكل:

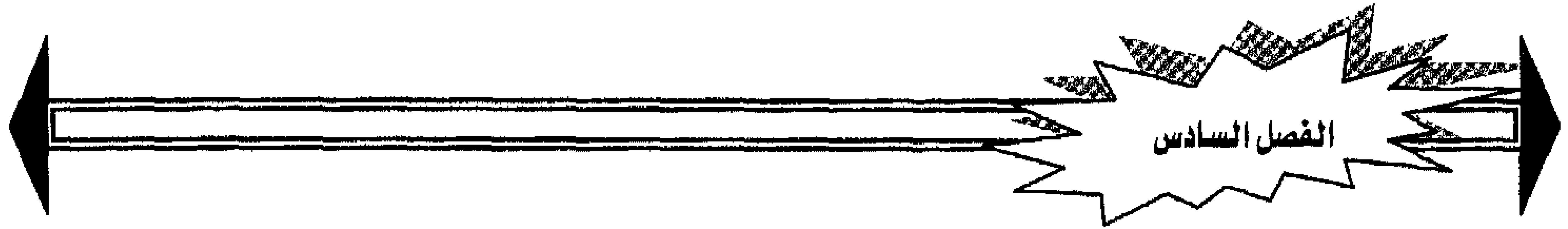
$$ص = \frac{١}{ع^{ن-١} + ب\,ع^{ن-٢} + ... + ب^{ن-١}}$$

إن عدد الحدود الموجودة في المخرج يساوي ن لأنه كثير حدود صحيح من الدرجة ن – ١ فإذا جعلنا س ← أ فإن ع ← ب ويكون.

$$ص \leftarrow \frac{١}{ن\,ب^{ن-١}} = \frac{١}{ن\,\sqrt[ن]{أ}^{\,ن-١}}$$

٩– أدرس نهاية التابع التالي وذلك عندما يسعى س إلى الصفر.

$$ص = \frac{س + \sqrt{س^{٢}}}{س}$$



إن $\sqrt{س^{٢}}$ مقدار موجب وهو يساوي القيمة المطلقة لـ س أي |س| وهذه القيمة المطلقة تساوي س نفسه إذا كـان س موجبـاً وتـساوي – س إذا كـان س سالباً وعلى ذلك إذا سعى س نحو الصفر من اليسار فأن التركيب السابق يكـون من الشكل.

$$ص = س - \frac{س}{س}$$

وعندما ينتهي س إلى الصفر فإن ص ينتهي إلى (-١)

أما إذا سعى س نحـو الـصفر بـالقيم الموجبـة فـإن التـابع المـذكور يكتـب بالشكل

$$ص = س + \frac{س}{س}$$

وعندما نسعى س إلى الصفر ينتهي ص إلى (+١) وتكتب بشكل رمزي

$$و\,(س + ٠) = +١$$

$$و\,(س - ٠) = -١$$

١٠- عين نهاية التابع الآلي، وذلك عندما ينتهي المتحول س إلى ٢

$$ص = \frac{س - \sqrt{س + ٢}}{\sqrt{٤س + ١} - ٣}$$

الحل: نضرب صورة ومخرج هذا الكسر بجداء مزاوجي الصورة والمخرج فيكون:

$$ص = \frac{س - \sqrt{س + ٢}}{\sqrt{٤س + ١} - ٣} \cdot \frac{\left(س + \sqrt{٢س + ٢}\right)\left(\sqrt{٤س + ١} + ٣\right)}{\left(س + \sqrt{٢س + ٢}\right)\left(\sqrt{٤س + ١} + ١\right)}$$



$$\text{ص} = \frac{(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)(\sqrt{٤\text{س} + ١} + ٣)}{(٤\text{س} - ٨)(\text{س} + \sqrt{\text{س}} - ٢)}$$

نلاحظ أن $\text{س}^{٢}$ ــ س ــ ٢ = (س ــ ٢) (س + ١)

و (٤س ـ٨) = ٤ (س ــ ٢) فلنبدل في العلاقة السابقة

$$\text{ص} = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)(\sqrt{٢\text{س} + ١} + ٣)}{٤(\text{س} - ٢)(\text{س} + \sqrt{\text{س}} + ٢)}$$

إذا اختصرنا الصورة والمخرج على المضروب المشترك بينهما وهو س ــ ٢ ثم جعلنا س تسعى إلى (٢) فأن ص يسعى إلى

$$\frac{٦,٣}{٤,٤} = \frac{٩}{٨}$$

١١ - عين نهاية التابع التالي وذلك عندما يسعى ت نحو جـ

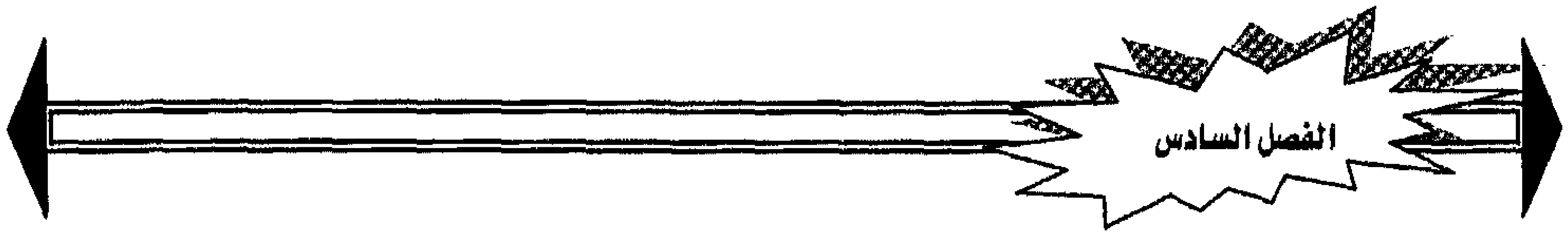
$$\text{ص} = \frac{\sqrt[٣]{\text{جـ}^{٢} - \text{جـ}\text{ت}} + \sqrt{\text{جـ}^{٢} - \text{ت}^{٢}}}{\sqrt[٣]{\text{جـ}^{٢} - \text{ت}^{٢}} + \sqrt{\text{جـ}^{٣} - \text{جـ}^{٢}\text{ت}}}$$

الحل: يمكن كتابة التركيب السابق بالشكل التالي:

$$\text{ع} = \frac{\sqrt[٣]{\text{جـ}(\text{جـ} - \text{ت})} + \sqrt{(\text{جـ} - \text{ت})(\text{جـ} + \text{ت})}}{\sqrt[٣]{(\text{جـ} - \text{ت})(\text{جـ} + \text{ت})} + \sqrt{\text{جـ}^{٢}(\text{جـ} - \text{ت})}}$$

أو بالشكل $\text{ع} = \frac{\text{جـ}^{\frac{١}{٣}}(\text{جـ} - \text{ت})^{\frac{١}{٣}} + (\text{جـ} - \text{ت})^{\frac{١}{٢}}(\text{جـ} + \text{ت})^{\frac{١}{٢}}}{(\text{جـ} - \text{ت})^{\frac{١}{٣}}(\text{جـ} + \text{ت})^{\frac{١}{٣}} + \text{جـ}(\text{جـ} - \text{ت})^{\frac{١}{٢}}}$

وبعد توحيد أسس الجذور التي تحوي المتحول ت يأخذ الشكل:



$$ع = \frac{جـ^{\frac{1}{3}}(جـ-ت)^{\frac{2}{6}}+(جـ-ت)^{\frac{3}{6}}(جـ+ت)^{\frac{3}{6}}}{(جـ-ت)^{\frac{2}{6}}(جـ+ت)^{\frac{2}{6}}+جـ(جـ-ت)^{\frac{2}{6}}}$$

عندما نجعل ت ⟵ جـ فإن:

$$ع \leftarrow \frac{جـ^{\frac{1}{3}}}{(2جـ)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

١٢- عين نهاية كل من التوابع الآتية وذلك عندما ينتهي س مقدراً بالرديان إلى الصفر.

$$\frac{جا ٢ت}{ظا ٣ت}،\ \frac{جا٣ت}{جا٥ت}،\ \frac{جا٣ت}{٥ت}$$

الحل: يمكن كتابة هذه التراكيب بالشكل الآتي:

$$\frac{جا٣ت}{٥ت} = \frac{جا٣ت}{٣ت}\cdot\frac{٣ت}{٥ت}$$

$$\frac{جا٣ت}{جا٥ت} = \frac{جا٣ت}{٣ت}\cdot\frac{٣ت}{٥ت}\cdot\frac{٥ت}{جا٥ت}$$

$$\frac{جا٢ت}{ظا٣ت} = \frac{جا٢ت}{٢ت}\cdot\frac{٢ت}{٣ت}\cdot\frac{٣ت}{ظا٣ت}$$

واستناداً إلى العلاقتين:

$$\frac{ظاس}{س} \leftarrow ١،\ \frac{جاس}{س} \leftarrow ١$$

وذلك عندما يسعى س إلى الصفر مقدراً بالراديان تكون نهايات هذه التراكيب على الترتيب.



$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٢}{٣}$

١٣- عين نهاية التابع التالي، وذلك عندما يسعى المتحول ت إلى الصفر.

$$\text{ص} = \frac{\text{جا}٢\text{ت}}{\sqrt{١ - \text{جتا ت}}}$$

الحل: من المعلوم أن:

$$\text{جا } ٢ \text{ ت} = ٢ \text{ جا ت جتا ت} = ٤ \text{ جا} \frac{\text{ت}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{ت}}{٢} \text{ جتا ت}$$

$$١ - \text{جتا ت} = ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{\text{ت}}{٢}$$

وأن الجذر الموجود في المخرج موجب أي يجب أن يكون:

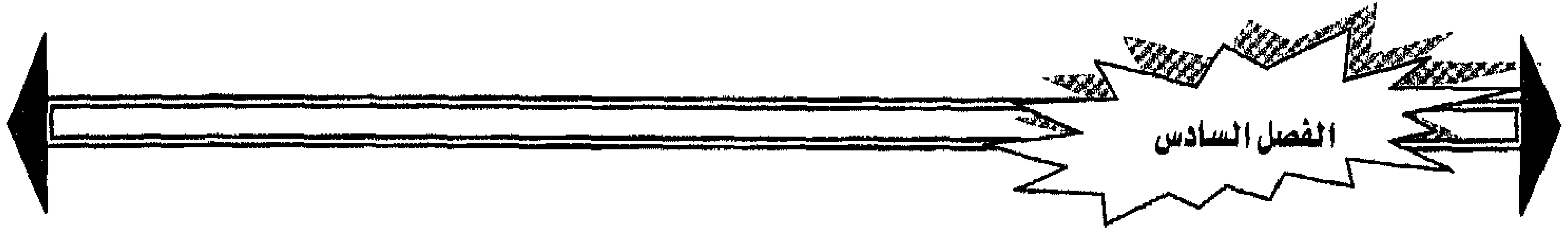
$$١-\sqrt{١ - \text{جتا ت}} = \sqrt{٢} \left| \text{جا} \frac{\text{ت}}{٢} \right|$$

لأن $\frac{\text{ت}}{٢}$ يمكن أن يكون موجباً أو سالباً بجوار الصفر.

إذا نقلنا كل ما سبق إلى العلاقة المفروضة فإننا نجد:

$$\text{ص} = \frac{٤ \text{ جا} \frac{\text{ت}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{ت}}{٢} \text{ جتا ت}}{\sqrt{٢} \left| \text{جا} \frac{\text{ت}}{٢} \right|}$$

ونلاحظ بسهولة أنه عندما يسعى ت نحو الصفر من اليمين فإن ص ← $٢\sqrt{٢}$ أما إذا سعى إلى الصفر من اليسار فإن ص ← $-٢\sqrt{٢}$



١٤- أحسب:

$$\text{ا} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3\text{س}^4} - \sqrt{1-2\text{س}}}{\sqrt[2]{1+\text{س}} - \sqrt{1+\text{س}}}$$

نلاحظ أنه عندما نبدل في هذا الكسر س بصفر فإنه يأخذ الشكل:س

$$\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

لنكتب الكسر المفروض، بعد أن نضيف إلى الصورة والمخرج العدد (١) ونطرحه منهما بالشكل:

$$\frac{\left(\sqrt[5]{1+3\text{س}^4} - 1\right) - \left(\sqrt{1-2\text{س}} - 1\right)}{\left(\sqrt[2]{1+\text{س}} - 1\right) - \left(\sqrt{1+\text{س}} - 1\right)}$$

لنقسم الصورة والمخرج على س فنجد:

$$\frac{\dfrac{\left(\sqrt[5]{1+3\text{س}^4} - 1\right)}{\text{س}} - \dfrac{\left(\sqrt{1-2\text{س}} - 1\right)}{\text{س}}}{\dfrac{\left(\sqrt[2]{1+\text{س}} - 1\right)}{\text{س}} - \dfrac{\left(\sqrt{1+\text{س}} - 1\right)}{\text{س}}}$$

ويكون عندها

$$\frac{\text{نها} \dfrac{\sqrt[5]{1+2\text{س}} - 1}{\text{س}} - \text{نها} \dfrac{\sqrt{1+2\text{س}} - 1}{\text{س}}}{\text{نها} \dfrac{\sqrt[3]{1+\text{س}} - 1}{\text{س}} - \text{نها} \dfrac{\sqrt{1+\text{س}} - 1}{\text{س}}}$$

وذلك عندما تسعى س إلى الصفر.



لنحسب نهاية كل كسر في هذا التركيب فنجد بعد أن نضرب صورة الكسر الأول ومخرجه بمزاوج صورته.

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{١-٢س-١}{س\left(\sqrt{١-٢س}+١\right)} = \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{-٢}{١+\sqrt{١-٢س}} = -١$$

وبالطريقة ذاتها نجد أن نهاية الكسر الأول الموجود في المخرج هو $\frac{١}{٢}$ أما لحساب نهاية الكسر الثاني من الصورة فإننا نفرض للاختصار ص = $\sqrt[٥]{١+٣س^{٤}}$ ثم نضرب صورة مخرج هذا الكسر بـ ص٤ + ص٣ + ص٢ + ص + ١ فنأخذ هذا الكسر الشكل:

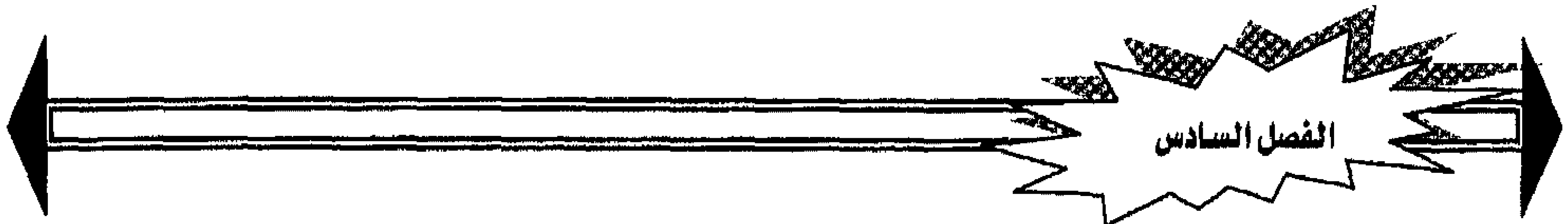
$$\frac{ص-١}{س} = \frac{(ص-١)ص^{٤}+ص^{٣}+ص^{٢}+ص+١}{س(ص^{٤}+ص^{٣}+ص^{٢}+ص+١)} = \frac{ص^{٥}-١}{س(ص^{٤}+ص^{٣}+ص^{٢}+ص+١)}$$

$$\frac{٣س^{٣}}{ص^{٤}+ص^{٣}+ص^{٢}+ص+١}$$

وذلك بعد أن بدلنا في الصورة فقط ص بما يساويها.

ولكن عندما س ← صفر فإن : ص ← ١ وتكون نهاية هذا الكسر هي الصفر نستعمل الطريقة ذاتها من أجل حساب نهاية الكسر الثاني الموجود في المخرج فنفرض ص = $\sqrt[٣]{١+س}$ ونضرب صورة ومخرج هذا الكسر بـ ص^{٢} + ص + ١ في الصورة فقط ص بما يساويها.

ولكن عندما س ← فنجد أن نهاية هذا الكسر هي ويكون أخيراً.



$$\text{أ} = \frac{\text{صفر} - (-١)}{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}} = -٦$$

١٥- أدرس نهاية التركيب التالي وذلك عندما تسعى س إلى اللانهاية

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \sqrt{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}}{٢\text{س} - \sqrt{٤\text{س}^٢ + \text{س}}}$$

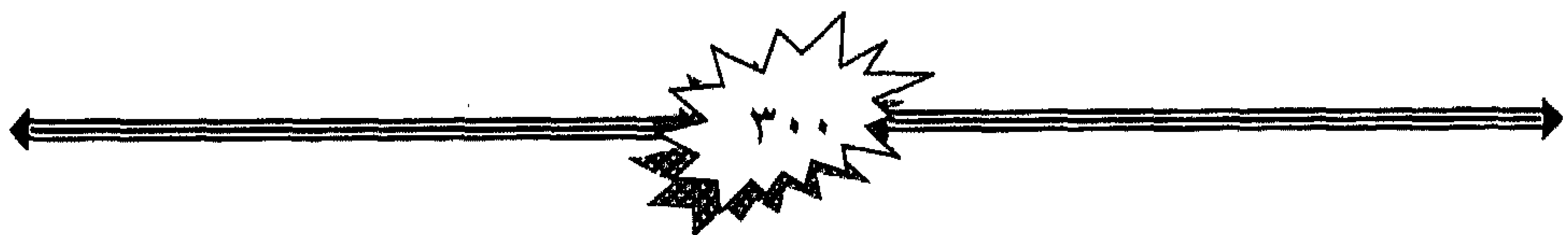
نلاحظ من دراسة المقادير الواقعة تحت الجذرين الموجودين في هذا التركيب أن س يمكنه أن يسعى إلى - ∞ أو + ∞ ولذا فيجب النظر في هاتين الحالتين.

١) س ⟵ - ∞ لنخرج $\text{س}^٢$ من تحت الجذرين وبما أن س تسعى إلى - ∞ فيجب أن نضع خارج الجذر س بالقيمة المطلقة وبما أنه من أجل قيم س السالبة يكون ١ × $\text{س}^١$ = - س فإن الكسر المفروض يأخذ الشكل التالي:

$$\text{ص} = \frac{\text{س} + \text{س}\sqrt{١ + \frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^٢}}}{٢\text{س} + ٢\text{س}\sqrt{١ + \frac{١}{\text{س}}}}$$

لنجعل س تسعى إلى اللانهاية في هذا الكسر بعد أن نقسم صورته ومخرجه على س فتسعى قيمته على $\frac{١}{٢}$.

٢) س ⟵ + ∞ نضرب هذا التركيب بحاصل قسمة مزواج المخرج على مزواج الصورة ومن ثم بحاصل قسمة مزواج الصورة على مزواج المخرج فيكون



$$ص = \frac{س - \sqrt{س^٢ + س + ١}}{٢س - \sqrt{٤س^٢ + س}} \times \frac{س + \sqrt{س^٢ + س + ١}}{٢س + \sqrt{٤س^٢ + س}} \times \frac{٢س + \sqrt{٤س^٢ + س}}{س + \sqrt{س^٢ + س + ١}}$$

$$= \frac{س^٢ - (س^٢ + س + ١)}{٤س^٢ - (٤س^٢ + س)} \times \frac{٢س + \sqrt{٤س^٢ + س}}{س + \sqrt{س^٢ + س + ١}}$$

نخرج $س^٢$ من تحت الجذر بعد أن نذكر أننا ندرس الحالة التي تكون فيها قيم س موجبة وكبيرة ونضع س خارج الجذرين فيكون:

$$ص = ٢\frac{س + ١}{س} \cdot \frac{١ + \sqrt{١ + \frac{١}{٤}س}}{١ + \sqrt{١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢}}}$$

ونلاحظ بسهولة أنه عندما يسعى س إلى اللانهاية يسعى ص إلى ٢.

تمارين

١٧- احسب عندما يسعى المتحول س إلى م، نهاية الكسر:

$$\frac{(\text{٣س}-\text{م})^{\frac{1}{2}}-(\text{س}+\text{م})^{\frac{1}{2}}}{\text{س}-\text{م}}$$

ج: $\frac{1}{(\text{٢م})^{\frac{1}{2}}}$

١٨) احسب $\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{٣س}^2 - + \text{٧س}+4}{\text{٢س}^2-\text{٥س}+3}$

١٩) $\lim_{\text{ت}\to 2}\frac{\text{ت}^3-\text{ت}^2-\text{ت}-2}{\text{ت}^3-\text{٣ت}^2+\text{٣ت}-2}$

٢٠) $\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\text{س}^3-\text{م}^3}{\text{س}^4-\text{٢س}^2\text{م}^2}$

٢١) $\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\sqrt{1+\text{س}}-\sqrt{1-\text{س}}}{\text{س}}$

٢٢) $\lim_{\text{ع}\to 0}\frac{\sqrt[3]{\text{ع}+27}-3}{\sqrt{\text{ع}+16}-2}$

٢٣) $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{2\sqrt[3]{1+\text{س}}-\sqrt{4-\text{س}}}{\sqrt{9+\text{س}}-3}$

٢٤) $\lim_{\text{س}\to\text{م}}\frac{\sqrt{\text{س}^2+\text{مس}+\text{م}^2}-\sqrt{\text{س}^2-\text{مس}+\text{م}^2}}{\sqrt{\text{م}+\text{س}}-\sqrt{\text{م}-\text{س}}}$

٢٥) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{لو(١+س^{٢}+س^{٤})}{٣س^{٢}(١-٢س)}$

٢٦) $\underset{س \leftarrow ١}{نها} \dfrac{١-س+لوس}{١-\sqrt{٢س-س^{٢}}}$

٢٧) $\underset{ن \leftarrow \infty}{نها} \left\{ \left(\dfrac{ن+١}{ن}\right)^{ن} - \left(\dfrac{ن+١}{ن}\right) \right\}^{ن}$

٢٨) $\underset{ن \leftarrow \infty}{نها} \dfrac{(ن-١)^{ن-١}}{ن^{ن}}$

٢٩) $\underset{س \leftarrow صفر}{نها} \left(\dfrac{١}{س}\right) لو \dfrac{١+س}{١-س}$

٣٠) $\underset{هـ \leftarrow \pi}{نها} \dfrac{ته ٢هـ}{جا هـ}$

٣١) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{جاهـ - ته هـ}{جتاهـ - جا جتاهـ}$

٣٢) $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \dfrac{٢س^{٢}+٣\sqrt{س}+س^{\frac{٣}{٢}}}{\sqrt{س^{٤}-س^{٢}+١}}$

٣٣) $\underset{س \leftarrow ١}{نها} \dfrac{س^{٤}-٢س^{٣}+٥س^{٢}-٨س+٤}{س^{٤}-س^{٣}+٨س-٨}$

٣٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \dfrac{س}{١-\sqrt{١-س}}$

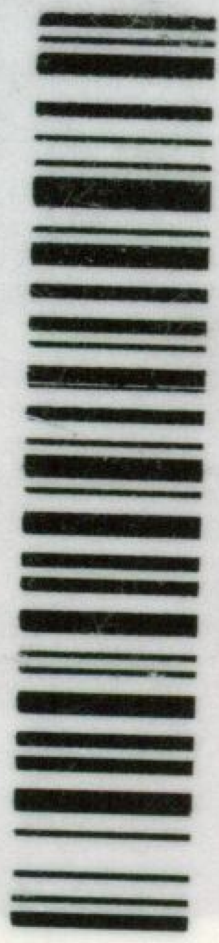
٣٥) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \left(\dfrac{س^{٢}+١}{س-٢} - \dfrac{٢س^{٣}+٢س}{س^{٢}-٤}\right)$

٣٦) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \left(\dfrac{س+٩}{س^{٢}-٩} - \dfrac{س-١}{س-٣}\right)$

الرياضيات

$\pi = 3.1415926$
53589793238462
64338327950288
41971693993751
05820974944592
30781640628620
89986280348253
421170679821480865132823066470
93844609550582231725359
4081284811174502841027019

- نظم الأعداد
- المنطق الرياضي
- المجموعات والأعداد
- التوزيعات التكرارية والتمثيل البياني
- المجموعات والدوال
- التوابع - النهايات الاستمرار




9789957247133



دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع
المملكة الأردنية الهاشمية - عمَّان - شارع الملك حسين
مجمع الفحيص التجاري - هاتف : 4611169 6 962+
تلفاكس: 4612190 6 962+ ص.ب 922762 عمَّان 11192 الأردن
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net